

目 录

绪 论	1
第一章 离散时间信号与系统	8
1.1 离散时间信号——序列	8
1.2 线性移不变系统	20
1.3 常系数线性差分方程	30
1.4 连续时间信号的抽样	33
习题	41
第二章 z 变换	44
2.1 引言	44
2.2 z 变换的定义与收敛域	44
2.3 z 反变换	49
2.4 z 变换的基本性质和定理	59
2.5 序列的 z 变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系	69
2.6 序列的傅里叶变换	71
2.7 傅里叶变换的一些对称性质	73
2.8 离散系统的系统函数, 系统的频率响应	75
习题	83
第三章 离散傅里叶变换	87
3.1 引言	87
3.2 傅里叶变换的几种可能形式	87
3.3 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)	91
3.4 离散傅里叶级数的性质	93
3.5 离散傅里叶变换(DFT)——有限长序列的离散频域表示	95
3.6 离散傅里叶变换的性质	97
3.7 抽样 z 变换——频域抽样理论	110
3.8 利用 DFT 计算模拟信号的傅里叶变换(级数)对	114
3.9 序列的抽取与插值	122
习题	132
第四章 快速傅里叶变换	138
4.1 引言	138

4.2	直接计算 DFT 的问题及改进的途径	138
4.3	按时间抽选(DIT)的基-2 FFT 算法(库利-图基算法)	139
4.4	按频率抽选(DIF)的基-2 FFT 算法(桑德-图基算法)	151
4.5	离散傅里叶反变换(IDFT)的快速计算方法	156
4.6	N 为复合数的 FFT 算法——混合基算法	157
4.7	基-4 FFT 算法	163
4.8	分裂基 FFT 算法	168
4.9	线性调频 z 变换(Chirp- z 变换)算法	172
4.10	线性卷积与线性相关的 FFT 算法	177
4.11	数字信号处理的实现	184
	习题	200
第五章	数字滤波器的基本结构	202
5.1	数字滤波器结构的表示方法	202
5.2	无限长单位冲激响应(IIR)滤波器的基本结构	203
5.3	有限长单位冲激响应(FIR)滤波器的基本结构	209
5.4	数字滤波器的格型结构	217
	习题	226
第六章	无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器的设计方法	228
6.1	引言	228
6.2	最小与最大相位延时系统,最小与最大相位超前系统	232
6.3	全通系统	234
6.4	用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器	238
6.5	冲激响应不变法	239
6.6	阶跃响应不变法	243
6.7	双线性变换法	245
6.8	常用模拟低通滤波器特性	252
6.9	设计 IIR 滤波器的频率变换法	272
6.10	先利用模拟域频带变换法,再利用数字化法设计数字各型滤波器	273
6.11	先将模拟归一化低通原型数字化为数字低通,再利用数字域频带 变换法设计数字各型滤波器	292
6.12	直接在数字域设计 IIR 数字滤波器	307
6.13	设计 IIR 滤波器的最优化方法	315
6.14	数字滤波器的实现	322
	习题	330

第七章 有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器的设计方法	334
7.1 引言	334
7.2 线性相位 FIR 滤波器的特点	334
7.3 窗函数设计法	344
7.4 频率抽样设计法	359
7.5 设计 FIR 滤波器的最优化方法	368
7.6 FIR 数字滤波器的硬件实现——位串行方式实现	380
7.7 IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	387
习题	388
第八章 数字信号处理中的有限字长效应	392
8.1 引言	392
8.2 二进制数的表示及其对量化的影响	392
8.3 A/D 变换的量化效应	403
8.4 数字滤波器的系数量化效应	408
8.5 数字滤波器运算中的有限字长效应	418
8.6 FFT 算法的有限字长效应	430
习题	438
第九章 数字信号处理器	441
9.1 引言	441
9.2 数字信号处理器的结构特点	459
9.3 TMS 320C30 数字信号处理器	462
9.4 TMS 320 系列 DSP 系统的设计与调试	478
附录 本书所附“数字信号处理多媒体 CAI 教程”光盘简介	483
参考文献	484

绪 论

数字信号处理(DSP, digital signal processing)是从20世纪60年代以来,随着信息学科和计算机学科的高速发展而迅速发展起来的一门新兴学科。它的重要性日益在各个领域的应用中表现出来。

简言之,数字信号处理是把信号用数字或符号表示的序列,通过计算机或通用(专用)信号处理设备,用数字的数值计算方法处理(例如滤波、变换、压缩、增强、估计、识别等),以达到提取有用信息便于应用的目的。

一、信号、系统和信号处理

1. 信号

信号是信息的物理表现形式,或说是传递信息的函数,而信息则是信号的具体内容。例如,交通红绿灯是信号,它传递的信息是:红——停止,绿——通行。根据载体的不同,信号可以是电的、磁的、声的、光的、机械的、热的等各种信号。

同一种信号,例如电信号,又可以从不同角度进行分类。

(1) 一维信号、二维信号、矢量信号:信号的变量可以是时间,也可以是频率、空间或其他的物理量。若信号是一个变量(例如时间)的函数,则称为一维信号;若信号是两个变量(例如空间坐标 x, y) 的函数,则称为二维信号;推而广之,若信号是多个(例如 M 个, $M \geq 2$) 变量的函数,则称为多维(M 维)信号。若信号表示成 M 维的矢量

$$x = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T$$

(式中 τ 为转置, n 为时间变量),则称 x 是一个 M 维的矢量信号。

本书只讨论一维信号。

(2) 周期信号和非周期信号:若信号满足 $x(t) = x(t + kT)$, k 为正整数;或 $x(n) = x(n + kN)$, k, N 皆为正整数, $n + kN$ 为任意整数,则 $x(t)$ 和 $x(n)$ 都是周期信号,周期分别为 T 和 N ;否则就是非周期信号。

(3) 确定信号和随机信号:若信号在任意时刻的取值能精确确定,则称它为确定信号;若信号在任意时刻的取值不能精确确定,或说取值是随机的,则称为随机信号。

(4) 能量信号和功率信号:若信号能量 E 有限,则称为能量信号;若信号功率 P 有限,则称为功率信号。信号能量 E 可表示为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

信号功率 P 可表示为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

周期信号及随机信号一定是功率信号,而非周期的绝对可积(和)信号一定是能量信号。

(5) 连续时间信号、离散时间信号和数字信号:变量的取值方式有连续与离散两种。若变量(一般都看成时间)是连续的,则称为连续时间信号;若变量是离散数值,则称为离散时间信号。信号幅值的取值方式又分为连续与离散两种方式(幅值的离散称之为量化),因此,组合起来应该有以下四种情况:

- ① 连续时间信号:时间是连续的,幅值可以是连续的也可以是离散(量化)的。
- ② 模拟信号:时间是连续的,幅值是连续的,这是上一种信号的特例。
- ③ 离散时间信号(或称序列):时间是离散的,幅值是连续的。
- ④ 数字信号:时间是离散的,幅值是量化的。由于幅值是量化的,故数字信号可用一序列的数来表示,而每个数又可表示为二进制码的形式。

本书的大部分章节是讨论离散时间信号——序列的分析和处理,而幅值量化则集中在第八章“数字信号处理中的有限字长效应”中进行讨论。

2. 系统

系统定义为处理(或变换)信号的物理设备。或者进一步说,凡是能将信号加以变换以达到人们要求的各种设备都称为系统。当然,系统有大小之分,一个大系统中又可细分为若干个小系统。实际上,因为系统是完成某种运算(操作)的,因而我们还可把软件编程也看成一种系统的实现方法。

按所处理的信号种类的不同可将系统分为四类:

- (1) 模拟系统:处理模拟信号,系统输入、输出均为连续时间连续幅度的模拟信号。
- (2) 连续时间系统:处理连续时间信号,系统输入、输出均为连续时间信号。
- (3) 离散时间系统:处理离散时间信号——序列,系统输入、输出均为离散时间信号。
- (4) 数字系统:处理数字信号,系统输入、输出均为数字信号。

系统可以是线性的或非线性的、时(移)不变或时(移)变的。

3. 信号处理

信号处理是研究用系统对含有信息的信号进行处理(变换),以获得人们所希望的信号,从而达到提取信息、便于利用的一门学科。信号处理的内容包括滤波、变换、检测、谱分析、估计、压缩、识别等一系列的加工处理。

因为多数科学和工程中遇到的是模拟信号,所以以前都是研究模拟信号处理的理论和实现。但是模拟信号处理难以做到高精度,受环境影响较大,可靠性差,且不灵活等。随着大规模集成电路以及数字计算机的飞速发展,加之从 60 年代末以来数字信号处理理论和技术成熟和完善,用数字方法来处理信号,即数字信号处理,已逐渐取代模拟信号处理。随着信息时代、数字世界的到来,数字信号处理已成为一门极其重要的学科和技术领域。

二、数字信号处理系统的基本组成

我们先来讨论模拟信号的数字化处理系统。此系统首先把模拟信号变换为数字信

号,然后用数字技术进行处理,最后再还原成模拟信号。这一系统的方框图如图 I 所示。图 II 则表示了框图中的各有关信号的波形。输入模拟信号 $x_a(t)$ (见图 II (a)) 先经过前置预滤波器,将 $x_a(t)$ 中高于某一频率(称为折叠频率,等于抽样频率的一半)的分量滤除。然后在模(拟)数(字)变换器(A/D 变换器)中每隔 T 秒(抽样周期)取出一次 $x_a(t)$ 的幅度,抽样后的信号称为离散时间信号,它只表示一些离散时间点 $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ 上的信号值 $x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \dots, x_a(nT), \dots$, 如图 II (b) 所示,抽样过程即是对模拟信号的时间离散化的过程;随之在 A/D 变换器的保持电路中将抽样信号变换成数字信号,因为一般采用有限位二进制码,所以它所表示的信号幅度就是有一定限制的,例如 4 位码,只能表示 $2^4=16$ 种不同的信号幅度,这些幅度称为量化电平(当离散时间信号幅度与量化电平不相同,就要以最接近的一个量化电平来近似它);所以经 A/D 变换器后,不但时间离散化了,而且幅度也量化了,这种信号就被称为数字信号,它是数的序列,每个数用有限个二进制数码来表示(如图 II (c) 所示),我们用 $x(n)$ 来代表输入信号数字化后的序列,自变量 n 是整型变量,表示这个数在序列中的次序,为了形象起见,用一个垂直线段来表示 $x(n)$ 的数值大小,如图 II (d) 所示。随后,数字信号序列 $x(n)$ 通过数字信号处理系统的核心部分,即数字信号处理器,按照预定的要求进行加工处理,得到输出数字信号 $y(n)$ (如图 II (e) 所示)。再后, $y(n)$ 通过数(字)模(拟)(D/A)变换器,将数字信号序列反过来变换成模拟信号,这些信号在时间点 $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ 上的幅度应等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值大小。最后还要通过一个模拟滤波器,滤除不必要的高频分量,平滑成所需的模拟输出信号 $y_a(t)$, 如图 II (f) 所示。

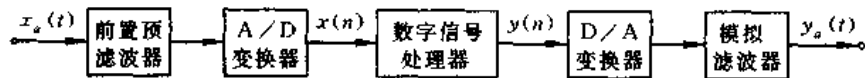


图 I 数字信号处理系统的简单方框图

图 I 所表示的是模拟信号数字处理系统的方框图,实际的系统并不一定要包括它的所有框图。例如,有些系统只需数字输出,可直接以数字形式显示或打印,就不需要 D/A 变换器;另一些系统的输入就是数字量,因而不需要 A/D 变换器;纯数字系统则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

图 I 中的数字信号处理器可以是数字计算机或微处理机,通过软件编程对输入信号进行预期的处理,这是一种软件实现方法。另一种方法是用基本的数字硬件组成专用处理机或用专用数字信号处理芯片作为数字信号处理器,这种方法的优点是可以进行实时处理,但是由于是专用的,因而只能完成某一具体的加工处理,而不能完成其他类的加工处理,这是它的缺点。第三种数字信号处理器就是现在最为流行的通用数字信号处理芯片,它是专为信号处理设计的芯片,有专门执行信号处理算法的硬件,例如乘法累加器、流水线工作方式、并行处理、多总线、位翻转(倒位序)硬件等,并有专为信号处理用的指令。采用信号处理器既有实时的优点,又有用软件实现的多用性优点,是一种重要的数字信号处理实现方法。实际上,由于近年来信息技术的快速发展,数字信号处理芯片已经应用到各个领域中了。

常用的数字信号处理芯片有两种类型,一种是专用 DSP 芯片,一种是通用 DSP 芯片。

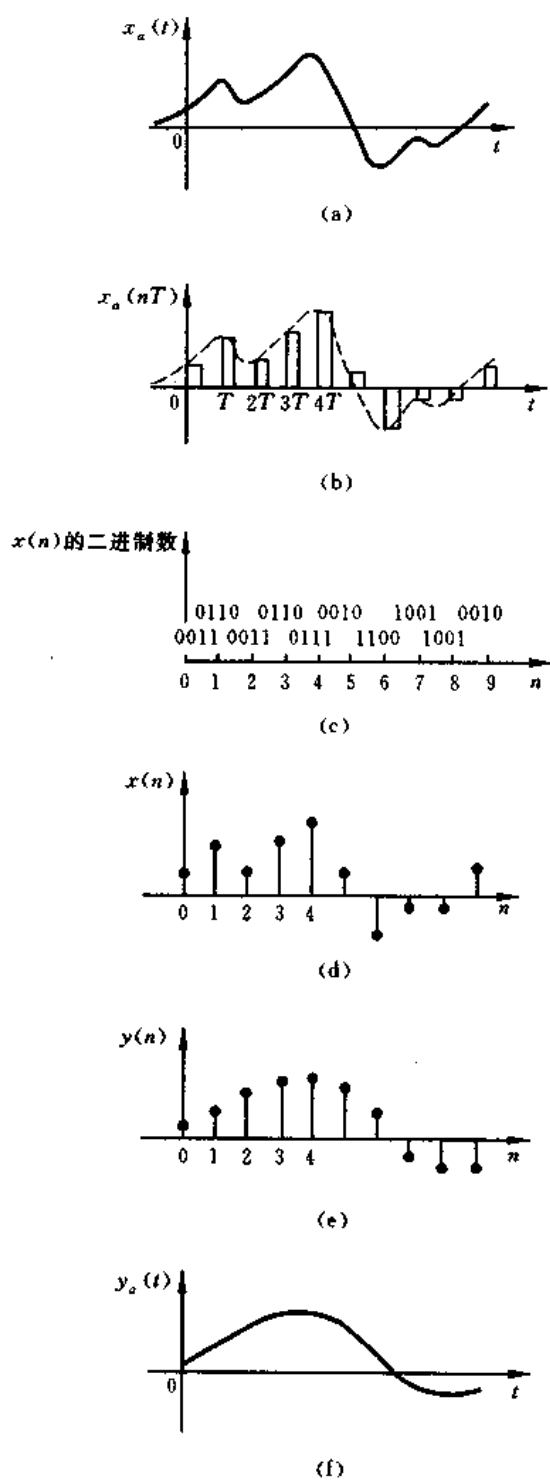


图 II 数字信号处理过程的波形图

- (a) 输入模拟信号波形； (b) 抽样信号； (c) 数字码；
 (d) 量化后的输入信号序列； (e) 输出信号序列； (f) 输出模拟信号

(1) 专用 DSP 芯片: 作为横向滤波器用的有 INMOS 公司的 A100, PLESSY GEC 公司的 PDSP16256 等, 作为快速傅里叶变换用的有 PLESSY GEC 公司的 PDSP16510, Austek 公司的 A41102; 还有作为复乘-累加以及求模/相角等用的专用 DSP 芯片。

(2) 通用 DSP 芯片: 有 TI(Texas Instruments)公司的 TMS320C1X/C2X/C2XX/C54X/C62X 系列定点制 DSP 芯片及 TMS320C3X/C4X/C8X/C67X 系列浮点制 DSP 芯片, 有 AD(Advance Device)公司的 ADSP21XX 定点制 DSP 芯片, ADSP21020/2106X/21160 浮点制 DSP 芯片, 有 AT&T(现名 Lucent)公司的 DSP32C/3210、DSP96002 浮点制 DSP 芯片, 还有 INMOS 公司的 Transputer 200/400/800/9000 浮点制 DSP 芯片等。其中在我国用得最多的是 TI 公司和 AD 公司的产品。我们将在第九章“数字信号处理器”中简要讨论 TI 公司的有关芯片。

三、数字信号处理的学科概貌

自从 1965 年库利(Cooley)和图基(Tukey)在《计算数学》(《Mathematics of Computation》)上发表了“用机器计算复序列傅里叶级数的一种算法”即“快速傅里叶变换算法”以来, 数字信号处理这一学科蓬勃发展, 逐渐形成了一整套较为完整的学科领域和理论体系。

数字信号处理学科包含有:

- (1) 离散时间线性时不变系统分析。
- (2) 离散时间信号时域及频域分析、离散傅里叶变换(DFT)理论。
- (3) 信号的采集, 包括 A/D, D/A 技术, 抽样, 多率抽样, 量化噪声理论等。
- (4) 数字滤波技术。
- (5) 谱分析与快速傅里叶变换(FFT), 快速卷积与相关算法。
- (6) 自适应信号处理。
- (7) 估计理论, 包括功率谱估计及相关函数估计等。
- (8) 信号的压缩, 包括语音信号与图信号的压缩。
- (9) 信号的建模, 包括 AR, MA, ARMA, CAPON, PRONY 等各种模型。
- (10) 其他特殊算法(同态处理、抽取与内插、信号重建等)。
- (11) 数字信号处理的实现。
- (12) 数字信号处理的应用。

以上(1), (2), (3)三点是理论和技术分析的基础, 是最基本的部分。

由于本书是数字信号处理的基础理论教程, 不可能涉及那么多的理论内容, 只着重于讨论上述前 5 点内容。其他内容将在后续选修课或研究生课中加以讨论。

四、数字信号处理的特点

数字信号处理系统具有以下一些明显的优点:

- (1) 精度高: 模拟网络的精度由元器件决定, 模拟元器件的精度很难达到 10^{-3} 以上, 而数字系统只要 14 位字长就可达到 10^{-4} 的精度。在高精度系统中, 有时只能采用数字系统。

由于数字信号可无损地存储在磁盘或光盘上,因而可随时传送,可在远端脱机处理。另外,时间可倒置、压缩或扩张处理。还可以进行同态处理(模拟系统则不能)。

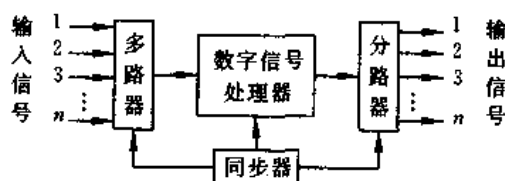
(2) 灵活性高:数字系统的性能主要由乘法器的系数决定,而系数是存放在系数存储器中的,因而只需改变存储的系数就可得到不同的系统,比改变模拟系统方便得多。

由于工艺水平的提高,集成度越来越高,而且可运用的频率也越来越高。

(3) 可靠性强:因为数字系统只有两个信号电平“0”和“1”,因而受周围环境的温度及噪声的影响较小。而模拟系统的各元器件都有一定的温度系数,且电平是连续变化的,易受温度、噪声、电磁感应等的影响。数字系统如采用大规模集成电路,其可靠性就更高。

(4) 容易大规模集成:由于数字部件具有高度规范性,便于大规模集成、大规模生产,而对电路参数要求不严,故产品成品率高。尤其是对于低频信号,例如,地震波分析需要过滤几赫兹到几十赫兹信号,用模拟网络处理时,电感器、电容器的数值、体积和重量都非常大,性能也不能达到要求,而数字信号处理系统在这个频率却非常优越。

(5) 时分复用:时分复用就是利用数字信号处理器同时处理几个通道的信号,其系统的方框图见图Ⅲ。由于某一路信号的相邻两抽样值之间存在着很大的空隙时间,因而可在同步器的控制下,在此时间空隙中送入其他路的信号,而各路信号则利用同一个信号处理器,后者在同步器的控制下,算完一路信号后再算另一路信号。处理器的运算速度越高,能处理的信道数目也就越多。



图Ⅲ 时分多路复用数字信号处理系统的方框图

(6) 可获得高性能指标:例如对信号进行频谱分析,模拟频谱仪在频率低端只能分析到10Hz以上的频率,且难以做到高分辨率(足够窄的带宽);但在数字谱分析中,已能做到 10^{-3} Hz的谱分析。又如,有限长冲激响应数字滤波器可实现准确的线性相位特性,这在模拟系统中是很难达到的。

(7) 二维与多维处理:利用庞大的存储单元可以存储一帧或数帧图像信号,实现二维甚至多维信号的处理,包括二维或多维滤波、二维或多维谱分析等。

由于数字信号处理的突出优点,使得它在通信、语音、雷达、地震测报、声呐、遥感、生物医学、电视、仪器中得到愈来愈广泛的应用。

五、数字信号处理的应用

(1) 滤波与变换:包括数字滤波/卷积、相关、快速傅里叶变换(FFT)、希尔伯特(Hilbert)变换、自适应滤波、加窗法等。

(2) 通信:包括自适应差分脉码调制、自适应脉码调制、脉码调制、差分脉码调制、增量调制、自适应均衡、纠错、数字公用交换、信道复用、移动电话、调制解调器、数据或数字信号的加密、破译密码、扩频技术、通信制式的转换、卫星通信、TDMA/FDMA/CDMA等

各种通信制式、回波对消、IP 电话、软件无线电等。

(3) 语音、语言：包括语音邮件、语音声码器、语音压缩、数字录音系统、语音识别、语音合成、语音增强、文本语音变换、神经网络等。

(4) 图像、图形：包括图像压缩、图像增强、图像复原、图像重建、图像变换、图像分割与描绘、模式识别、计算机视觉、固态处理、电子地图、电子出版、动画等。

(5) 消费电子：包括数字音频、数字电视、音乐综合器、电子玩具和游戏、CD/VCD/DVD 播放机、数字留言/应答机、汽车电子装置等。

(6) 仪器：包括频谱分析仪、函数发生器、地震信号处理器、瞬态分析仪、锁相环、模式匹配等。

(7) 工业控制与自动化：包括机器人控制、激光打印机控制、伺服控制、自动机、电力线监测器、计算机辅助制造、引擎控制、自适应驾驶控制等。

(8) 医疗：包括健康助理、病人监视、超声仪器、诊断工具、CT 扫描、核磁共振、助听器等。

(9) 军事：包括雷达处理、声呐处理、导航、射频调制解调器、全球定位系统(GPS)、侦察卫星、航空航天测试、自适应波束形成、阵列天线信号处理等。

六、数字信号处理的发展方向

(1) 数字汇聚(digital convergence)：即信号处理、通信和计算机的融合，其中数字信号处理是一种粘合剂，它把通信产业、消费类电子产业以及计算机产业紧密结合在一起。按照得州仪器公司的估计，2001 年数字信号处理器的工艺水平可达到 $0.10\mu\text{m}$ ，运算速度可达到 1 000 000MIPS(1 万亿条指令每秒)；2010 年工艺水平可达到 $0.075\mu\text{m}$ ，运算速度可达 3 000 000MIPS，可以置于任何系统中。

(2) 远程会议系统(teleconference systems)。

(3) 融合网络(fusion net)：把公众电信网络与计算机网络更好地结合在一起，并与家庭娱乐信息设施相适配的网络。

(4) 数字图书馆(cyberary)。

(5) 图像与文本合一的信息检索业务。

(6) 多媒体通信：包括媒体的压缩，媒体的综合(即从文本到语言以及自然会话的表情丰富的面孔，还有虚拟现实应用场景的综合)，媒体的识别(涉及到音频和视频目标的识别)，消息的转换和自然查询(例如，电子信函或传真向语音的转换，信息过滤，可变尺度的数据库与关系数据库各种通信网的综合)。

(7) 个人信息终端：把个人通信系统与个人数字助理非常自然地结合在一起，以实现无时不在无处不在的通信功能。

第一章 离散时间信号与系统

1.1 离散时间信号——序列

信号是传递信息的函数。例如,交通红绿灯是信号,它传递的信息是:红——停止,绿——通行。

按信号特点的不同,信号可表示成一个或几个独立变量的函数。例如,图像信号就是空间位置(二元变量)的亮度函数。一维变量可以是时间,也可以是其他参量,习惯上将其看成时间。信号有以下几种:

(1) 连续时间信号:在连续时间范围内定义的信号,但信号的幅值可以是连续数值,也可以是离散数值。当幅值为连续这一特定情况下又常称为模拟信号。实际上连续时间信号与模拟信号常常通用,用以说明同一信号。

(2) 离散时间信号:时间为离散变量的信号,即独立变量时间被量化了。而幅度仍是连续变化的。

(3) 数字信号:时间离散而幅度量化的信号。

我们现在来讨论离散时间信号。离散时间信号只在离散时间上给出函数值,是时间上不连续的序列。一般,离散时间的间隔是均匀的,以 T 表示,故用 $x(nT)$ 表示此离散时间信号在 nT 点上的值, n 为整数。由于可将信号放在存储器中,供随时取用,加之可以“非实时”地处理,因而可以直接用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点的序列值,并将序列表示成 $\{x(n)\}$ 。为了方便起见,就用 $x(n)$ 表示序列。注意, $x(n)$ 只在 n 为整数时才有意义, n 不是整数时没有定义。

离散时间信号——序列——可以用图形来描述,如图 1-1 所示。横轴虽为连续直线,但只在 n 为整数时才有意义。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

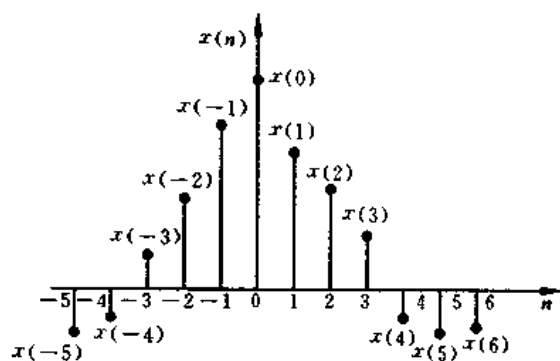


图 1-1 离散时间信号的图形表示

一、序列的运算

序列的运算包括移位、翻褶、和、积、累加、差分、时间尺度变换、卷积和等。

1. 移位

设某一序列为 $x(n]$ ，当 m 为正时，则 $x(n-m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次延时(右移) m 位而给出的一个新序列，而 $x(n+m)$ 则指依次超前(左移) m 位。 m 为负时，则相反。

[例 1-1]

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}, & n+1 \geq -1 \\ 0, & n+1 < -1 \end{cases}$$

或

$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq -2 \\ 0, & n < -2 \end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(n+1)$ 如图 1-2 所示。

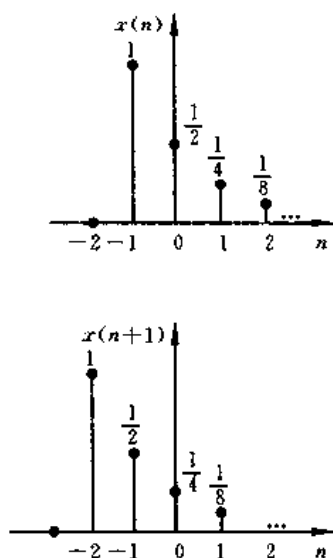


图 1-2 序列 $x(n)$ 及超前序列 $x(n+1)$

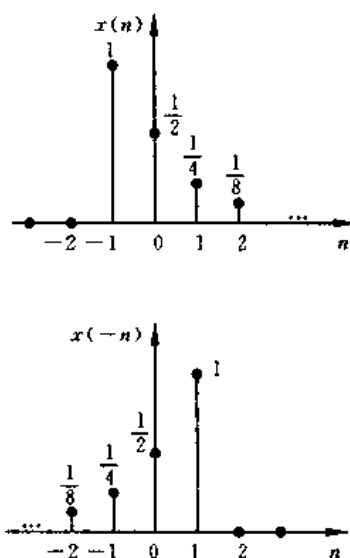


图 1-3 序列 $x(n)$ 及翻褶后的序列 $x(-n)$

2. 翻褶

如果序列为 $x(n]$ ，则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶。

[例 1-2]

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

翻褶的序列为

$$x(-n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-n}, & n \leq 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(-n)$ 如图 1-3 所示。

3. 和

两序列的和是指同序号(n)的序列值逐项对应相加而构成一个新的序列, 表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

[例 1-3]

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} 2^n, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

则

$$x(n) + y(n) = \begin{cases} 2^n, & n < -1 \\ \frac{3}{2}, & n = -1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n + n + 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$x(n)$, $y(n)$ 及 $x(n) + y(n)$ 如图 1-4 所示。

4. 积

两序列相乘是指同序号(n)的序列值逐项对应相乘。表示为

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

[例 1-4] 同上列中的 $x(n)$, $y(n)$, 则

$$x(n) \cdot y(n) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ \frac{1}{2}, & n = -1 \\ \frac{1}{2} (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

5. 累加

设某序列为 $x(n)$, 则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

它表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值等于这一个 n_0 上的 x

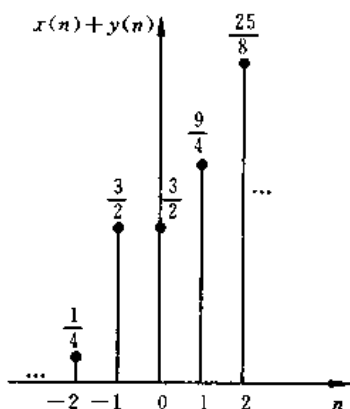
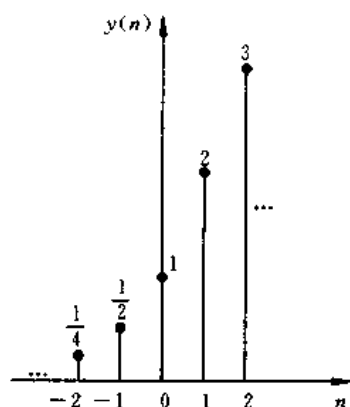
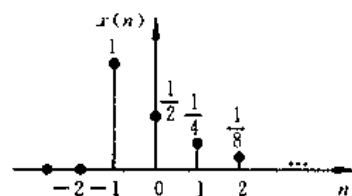


图 1-4 两序列相加

(n_0) 值以及 n_0 以前的所有 n 值上的 $x(n)$ 值之和。

[例 1-5]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{k=-1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^k, & n \geq -1 \\ y(n) = 0, & n < -1 \end{cases}$$

因而

$$n = -1, \quad y(-1) = 1$$

$$n = 0, \quad y(0) = y(-1) + x(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n = 1, \quad y(1) = y(0) + x(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$n = 2, \quad y(2) = y(1) + x(2) = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

其他 $y(n)$ 值可依此类推。 $x(n)$ 及 $y(n)$ 如图 1-5 所示。

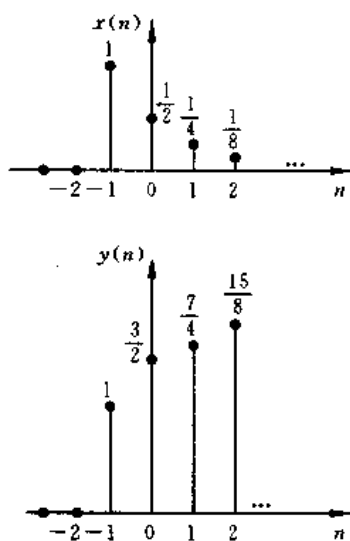


图 1-5 序列 $x(n)$ 及其累加序列 $y(n)$

6. 差分运算

前向差分

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

由此得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

[例 1-6]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 1, & n = -2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n > -2 \end{cases}$$

而

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n = -1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n > -1 \end{cases}$$

$x(n)$, $\Delta x(n)$ 及 $\nabla x(n)$ 如图 1-6 所示。

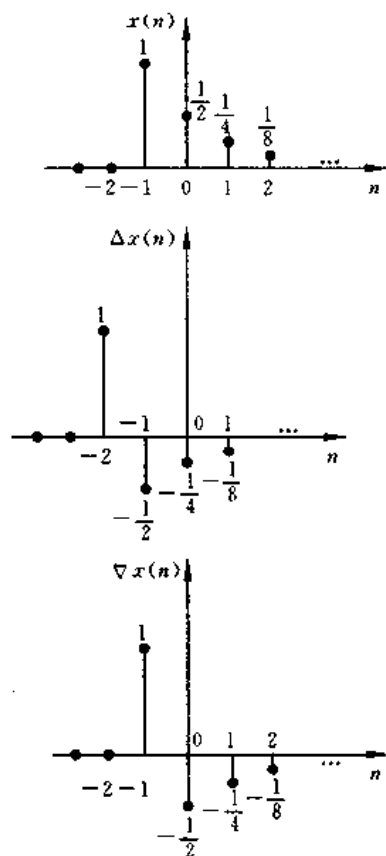


图 1-6 $x(n)$ 、前向差分 $\Delta x(n)$ 及后向差分 $\nabla x(n)$

7. 序列的时间尺度(比例)变换

对某序列 $x(n]$, 其时间尺度变换序列为 $x(mn)$ 或 $x\left(\frac{n}{m}\right)$, 其中 m 为正整数。

我们以 $m=2$ 的 $x(2n)$ 为例来说明。 $x(2n)$ 不是 $x(n)$ 序列简单地在时间轴上按比例

增一倍,而是以低一倍的抽样频率从 $x(n)$ 中每隔 2 点取 1 点,如果 $x(n)$ 是连续时间信号 $x(t)$ 的抽样,则这相当于将 $x(n)$ 的抽样间隔从 T 增加到 $2T$,这就是说,若

$$x(n) = x(t) \big|_{t=nT}$$

则

$$x(2n) = x(t) \big|_{t=n2T}$$

我们把这种运算称为抽取,即 $x(2n)$ 是 $x(n)$ 的抽取序列。 $x(n)$ 及 $x(2n)$ 分别如图 1-7(a),(b) 所示。

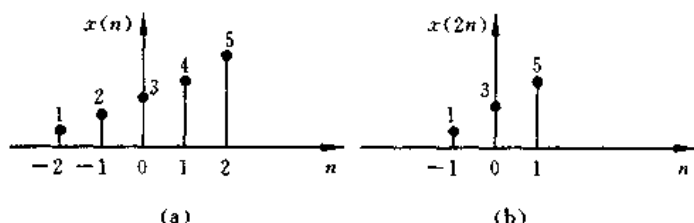


图 1-7 某序列及其抽取序列

$x\left(\frac{n}{2}\right) = x(t) \big|_{t=nT/2}$ 表示抽样间隔由 T 变成 $\frac{T}{2}$, 将 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 称为 $x(n)$ 的插值序列。我们将在 3.9 节中对它进行讨论。

8. 卷积和

我们知道卷积积分是求连续线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。同样,对离散系统“卷积和”也是求离散线性移不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。这里我们一般性地讨论卷积和的定义及运算方法。

设两序列为 $x(n)$ 和 $h(n)$, 则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (1-1)$$

其中把卷积和用 $*$ 来表示。卷积和的运算在图形表示上可分为四步:翻褶、移位、相乘、相加,如图 1-8 所示。

(1) 翻褶:先在哑变量坐标 m 上作出 $x(m)$ 和 $h(m)$, 将 $h(m)$ 以 $m=0$ 的垂直轴为对称轴翻褶成 $h(-m)$ 。

(2) 移位:将 $h(-m)$ 移位 n , 即得 $h(n-m)$ 。当 n 为正整数时,右移 n 位。当 n 为负整数时,左移 n 位。

(3) 相乘:再将 $h(n-m)$ 和 $x(m)$ 的相同 m 值的对应点值相乘。

(4) 相加:把以上所有对应点的乘积叠加起来,即得 $y(n)$ 值。

依上法,取 $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 各值,即可得全部 $y(n)$ 值。

一般求解时,可能要分成几个区间来分别加以考虑,可用下例说明。

[例 1-7] 设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & 1 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

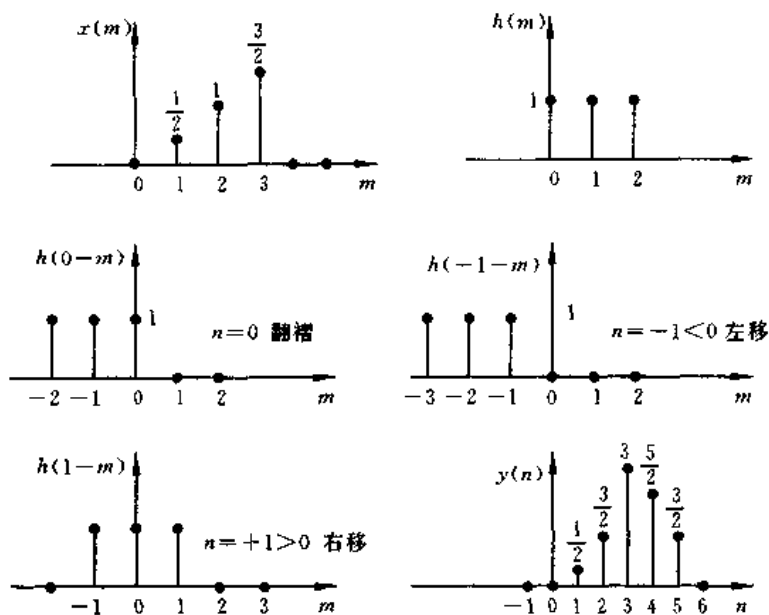


图 1-8 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和图解

则

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=1}^3 x(m)h(n-m)$$

分段考虑如下:

(1) 当 $n < 1$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相乘, 处处为零, 故

$$y(n) = 0, \quad n < 1$$

(2) 当 $1 \leq n \leq 2$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 有交迭相乘的非零项是从 $m=1$ 到 $m=n$, 故

$$y(n) = \sum_{m=1}^n x(m)h(n-m) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}n(1+n)$$

也就是

$$y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = \frac{3}{2}$$

(3) 当 $3 \leq n \leq 5$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 交迭而非零值的 m 范围的下限是变化的 ($n=3, 4, 5$ 分别对应 m 的下限为 $m=1, 2, 3$), 而 m 的上限是 3。

$$y(3) = \sum_{m=1}^3 x(m)h(3-m) = \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} \cdot (1+2+3) = 3$$

$$y(4) = \sum_{m=2}^3 x(m)h(4-m) = \sum_{m=2}^3 \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} \cdot (2+3) = \frac{5}{2}$$

$$y(5) = x(3)h(5-3) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

当 $n \geq 6$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 没有非零的交迭部分, 故 $y(n) = 0$ 。

卷积和的图解表示可见图 1-8。

由式(1-1)看出, 卷积和与两序列的先后次序无关。证明如下:

令 $n-m=m'$ 代入式(1-1), 然后再将 m' 换成 m , 即得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

因此

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

二、几种常用序列

1. 单位抽样序列(单位冲激) $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

$\delta(n)$ 类似于连续时间信号与系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$, 但是 $\delta(t)$ 是 $t=0$ 点脉宽趋于零, 幅值趋于无限大, 面积为 1 的信号, 是极限概念的信号, 或由分配函数来加以定义。而这里 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 时取值为 1, 既简单又易计算。单位抽样序列如图 1-9 所示。

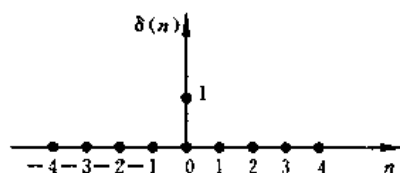


图 1-9 单位抽样序列

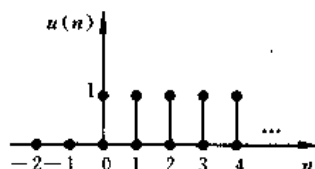


图 1-10 单位阶跃序列

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

它类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃函数 $u(t)$ 。但 $u(t)$ 在 $t=0$ 时常不给予定义, 而 $u(n)$ 在 $n=0$ 时定义为 $u(0)=1$, 如图 1-10 所示。

$\delta(n)$ 和 $u(n)$ 间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-4)$$

这就是 $u(n)$ 的后向差分。

而

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots \quad (1-5)$$

令 $n-m=k$, 代入此式可得

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1-6)$$

这里就用到了累加的概念。

3. 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (1-7)$$

如图 1-11 所示。

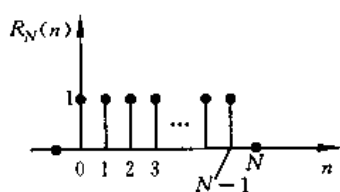


图 1-11 矩形序列

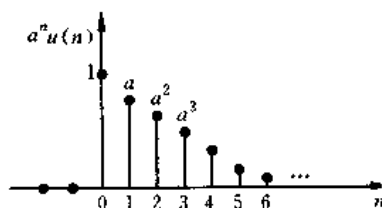


图 1-12 $0 < a < 1$ 时的实指数序列

$R_N(n)$ 和 $\delta(n)$ 、 $u(n)$ 的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N) \quad (1-8)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n - m) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \cdots + \delta[n - (N - 1)] \quad (1-9)$$

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \quad (1-10)$$

其中 a 为实数。当 $|a| < 1$ 时,序列是收敛的,而当 $|a| > 1$ 时,序列是发散的。

图 1-12 表示 $0 < a < 1$ 时 $a^n u(n)$ 的图形。

5. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1-11a)$$

或

$$x(n) = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n} \quad (1-11b)$$

它具有实部与虚部, ω_0 是复正弦的数字域频率。对第一种表示,可写成

$$x(n) = e^{\sigma n} (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) = e^{\sigma n} \cos \omega_0 n + j e^{\sigma n} \sin \omega_0 n$$

如果用极坐标表示,则

$$x(n) = |x(n)| e^{j \arg[x(n)]} = e^{\sigma n} \cdot e^{j\omega_0 n}$$

因此

$$|x(n)| = e^{\sigma n}, \quad \arg[x(n)] = \omega_0 n$$

6. 正弦型序列

$$x(n) = A \sin(n\omega_0 + \phi) \quad (1-12)$$

式中, A 为幅度, ω_0 为数字域的频率, ϕ 为起始相位。

三、序列的周期性

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N ,满足

$$x(n) = x(n + N) \quad (1-13)$$

则称序列 $x(n)$ 是周期性序列,周期为 N 。

现在讨论上述正弦序列的周期性。

由于

$$x(n) = A \sin(n\omega_0 + \phi)$$

则

$$x(n + N) = A \sin[(n + N)\omega_0 + \phi] = A \sin[N\omega_0 + n\omega_0 + \phi]$$

若

$$N\omega_0 = 2\pi k$$

k 为整数时, 则

$$x(n) = x(n + N)$$

即

$$A \sin(n\omega_0 + \phi) = A \sin[(n + N)\omega_0 + \phi]$$

这时正弦序列就是周期性序列, 其周期满足 $N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$ (N, k 必须为整数)。可分几种情况讨论如下。

(1) 当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时, 只要 $k=1, N=2\pi/\omega_0$ 就为最小正整数, 周期即为 $2\pi/\omega_0$ 。如图 1-13 所示。

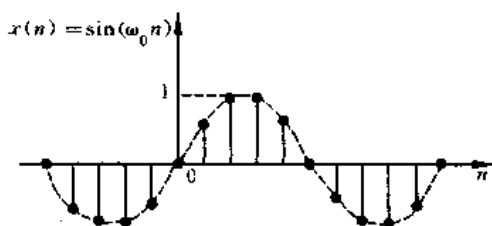


图 1-13 当 $\phi=0, \omega_0 = \frac{2\pi}{10}, A=1$ 时的正弦序列 (周期性序列, 周期 $N=10$)

(2) 当 $2\pi/\omega_0$ 不是整数, 而是一个有理数时 (有理数可表示成分数), 则

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k}$$

其中, k, N 为互素的整数, 则 $\frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{N}{k} k = N$ 为最小正整数, 这就是此正弦序列的周期。此时其周期将大于 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k}$ 。

(3) 当 $2\pi/\omega_0$ 是无理数时, 则任何 k 皆不能使 N 为正整数, 这时, 正弦序列不是周期性的。这和连续信号时是不一样的。

同样, 指数为纯虚数的复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。

无论正弦或复指数序列是否为周期性序列, 参数 ω_0 皆称为它们的频率。

实际上, 如果基波周期为 N , 则基波频率为 $2\pi/N$, 所以上述正弦信号的基波频率为 $\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{k}$, 而其基波周期则可写成 $N = k \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right)$ 。

下面, 我们来进一步讨论, 如果一个正弦型序列是由一个连续正弦信号抽样而得到的, 那么, 抽样时间间隔 T 和连续正弦信号的周期 T_0 之间应该是什么关系才能使所得到的抽样序列仍然是周期序列呢?

设连续正弦信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \phi)$$

这一信号的频率为 f_0 , 角频率为 $\Omega_0 = 2\pi f_0$, 信号的周期为 $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ 。

如果对此连续周期信号 $x(t)$ 进行抽样, 其抽样时间间隔为 T , 抽样后信号以 $x(n)$ 表示, 则有

$$x(n) = x(t)|_{t=nT} = A\sin(\Omega_0 nT + \phi)$$

如果令 ω 为数字频率, 满足

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{f_0}{f_s}$$

其中 f_s 是抽样重复频率, 简称抽样频率。可以看出, ω_0 是一个相对频率, 它是连续正弦信号的频率 f_0 对抽样频率 f_s 的相对频率乘以 2π , 或说是连续正弦信号的角频率 Ω_0 对抽样频率 f_s 的相对频率。用 ω_0 代替 Ω_0 , 可得

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$$

这就是我们上面讨论的正弦型序列。

下面我们来看 $2\pi/\omega_0$ 与 T 及 T_0 的关系, 从而讨论上面所述正弦型序列的周期性的条件意味着什么?

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \frac{1}{\Omega_0 T} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi f_0 T} = \frac{1}{f_0 T} = \frac{T_0}{T}$$

这表明, 若要 $2\pi/\omega_0$ 为整数, 就表示连续正弦信号的周期 T_0 应为抽样时间间隔 T 的整数倍; 若要 $2\pi/\omega_0$ 为有理数, 就表示 T_0 与 T 是互为互素的整数。下面举例加以说明。见图 1-14 所示。图中, $\omega_0 = \frac{3}{14} \times 2\pi$, 则有

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{14}{3} = \frac{T_0}{T} \quad (1-14)$$

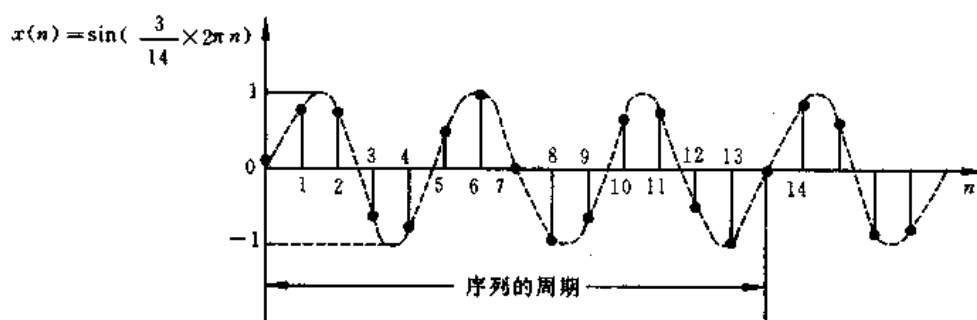


图 1-14 当 $\phi=0$, $\omega_0 = \frac{3}{14} \times 2\pi$, $A=1$ 时的正弦序列

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{14}{3} \text{ 为有理数, 序列周期为 } N=14\right)$$

因而可得

$$14T = 3T_0$$

也就是说, 14 个抽样间隔等于 3 个连续正弦信号的周期。由此可推出 $2\pi/\omega_0$ 等于任意有理数的一般情况的结论。

若满足 $2\pi/\omega_0$ 为有理数 (k/N), 则有

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{k}{N} = \frac{T_0}{T} \quad (1-15)$$

其中 k 和 N 皆为正整数, 从而有

$$kT = NT_0$$

即 k 个抽样间隔应等于 N 个连续正弦信号的周期。

四、用单位抽样序列来表示任意序列

单位抽样序列对于分析线性移不变系统(下面即将讨论)是很有用的。

一种办法是将任意序列表示成单位抽样序列的移位加权和,即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1-16)$$

显然,这是因为只有 $m=n$ 时, $\delta(n-m)=1$, 因而

$$x(m)\delta(n-m) = \begin{cases} x(n), & m=n \\ 0, & \text{其他 } m \end{cases}$$

同样, (1-16) 式 $x(n)$ 的表达式可看成 $x(n)$ 和 $\delta(n)$ 的卷积和。

[例 1-8] $x(n)$ 如图 1-15(a) 所示。 $x(n)$ 可表示为

$$x(n) = a_{-3}\delta(n+3) + a_2\delta(n-2) + a_6\delta(n-6)$$

这可看成单位抽样序列的移位加权和, 如图 1-15(b) 所示; 也可表示成 $x(n)$ 与 $\delta(n)$ 的卷积和, 如图 1-15(c) 所示。

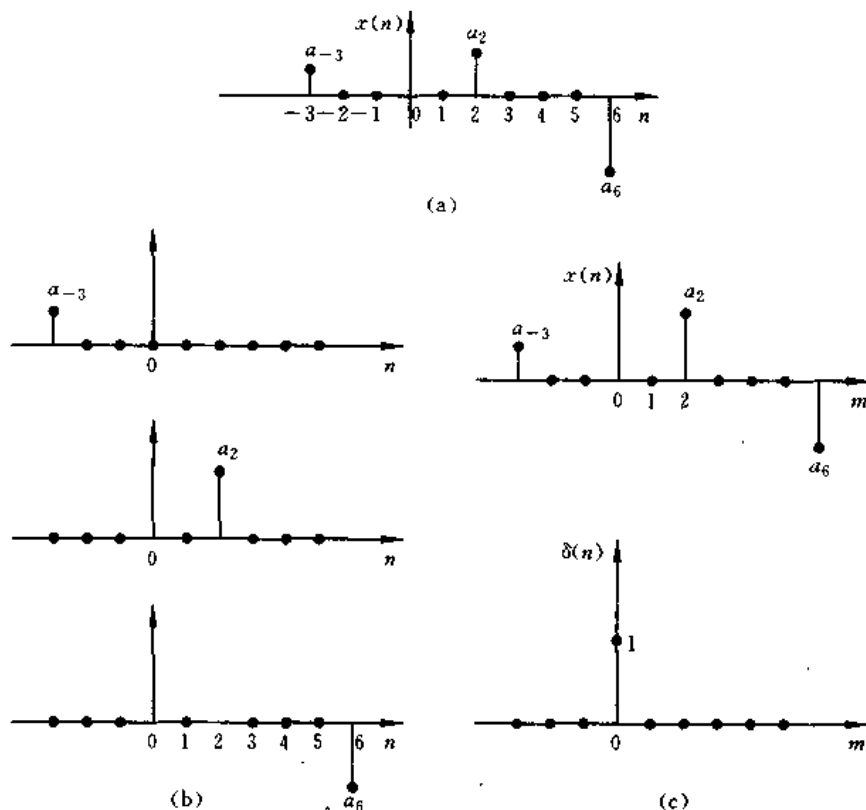


图 1-15 用单位抽样序列表示任意序列 $x(n)$

(a) $x(n)$ 序列; (b) 将 $x(n)$ 表示成单位抽样序列的移位加权和; (c) 将 $x(n)$ 表示成 $x(n)$ 和 $\delta(n)$ 的卷积和。

五、序列的能量

序列 $x(n)$ 的能量 E 定义为序列各抽样值的平方和, 即

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1-17)$$

1.2 线性移不变系统

一个离散时间系统是将输入序列变换成输出序列的一种运算。若以 $T[\cdot]$ 来表示这种运算, 则一个离散时间系统可由图 1-16 来表示, 即

$$y(n) = T[x(n)]$$

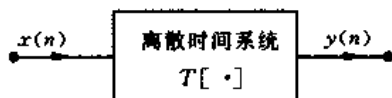


图 1-16 离散时间系统

本书所要研究的是“线性移不变”的离散时间系统。

一、线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统, 即, 若某一输入是由 N 个信号的加权和组成, 则输出就是系统对这几个信号中每一个的响应的同样加权和组成。这里, 实际上包含了两个性质:

1. 可加性

设

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

则有

$$y_1(n) + y_2(n) = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)]$$

2. 比例性(或称齐次性)

$$a_1 y_1(n) = a_1 T[x_1(n)] = T[a_1 x_1(n)]$$

$$a_2 y_2(n) = a_2 T[x_2(n)] = T[a_2 x_2(n)]$$

综合上面 1, 2 两点可知, 叠加原理可表示为

$$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)] = T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] \quad (1-18)$$

对线性系统若写成 N 个输入的一般表达式, 则为

$$\sum_{i=1}^N a_i y_i(n) = T\left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(n)\right] \quad (1-19)$$

这就是叠加原理的一般表达式。

对线性系统满足叠加原理的一个直接结果就是: 在全部时间为零输入时, 其输出也恒等于零, 也就是说, 零输入产生零输出。这可用比例性来加以证明

若

$$x(n) \rightarrow y(n)$$

则

$$0 \cdot x(n) = 0 \rightarrow 0 \cdot y(n) = 0$$

在证明一个系统是线性系统时, 必须证明此系统同时满足可加性和比例性, 而且信号以及任何比例常数都可以是复数。我们用以下例子来加以说明。

[例 1-9] 已知系统输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 满足以下关系

$$y(n) = \text{Im}[x(n)]$$

试讨论此系统是否是线性系统。

解 我们来证明此系统是可加的, 令 $x_1(n)$ 为复数输入

$$x_1(n) = r(n) + jp(n)$$

则相应的输出为

$$y_1(n) = p(n)$$

若 $x_2(n)$ 为复数

$$x_2(n) = f(n) + jg(n)$$

则

$$y_2(n) = g(n)$$

所以

$$x_1(n) + x_2(n) = r(n) + f(n) + j[p(n) + g(n)]$$

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = p(n) + g(n)$$

显然无论 $r(n), f(n), g(n), p(n)$ 取什么实数, 都满足可加性。

下面我们来证明这个系统不满足比例性, 仍设

$$x_1(n) = r(n) + jp(n)$$

则

$$y_1(n) = p(n)$$

若令加权复数为 $a=j$, 也就是考虑输入为

$$x_2(n) = ax_1(n) = jx_1(n) = j[r(n) + jp(n)] = -p(n) + jr(n)$$

则此时间的输出为

$$y_2(n) = \text{Im}[x_2(n)] = \text{Im}[ax_1(n)] = r(n)$$

它并不等于 $ay_1(n)$, 因为

$$ay_1(n) = jp(n)$$

因此, 这个系统不满足比例性, 所以不是线性系统。

[例 1-10] 以下系统是否为线性系统:

$$y(n) = 4x(n) + 6$$

解 很容易证明这个系统不是线性的, 因为此系统不满足可加性。证明如下:

令 $x_1(n)=3, x_2(n)=4$, 则

$$x_1(n)=3 \rightarrow y_1(n) = 4x_1(n) + 6 = 18$$

$$x_2(n)=4 \rightarrow y_2(n) = 4x_2(n) + 6 = 22$$

所以

$$y_1(n) + y_2(n) = 40$$

而系统对 $x_3(n) = x_1(n) + x_2(n)$ 的响应却是

$$x_3(n) = x_1(n) + x_2(n) = 7 \rightarrow y_3(n) = 4x_3(n) + 6 = 34$$

它不等于 $y_1(n) + y_2(n)$, 所以此系统不满足可加性, 故不是线性系统。

实际上, 用此系统不满足零输入 ($x(n)=0$) 应该得到零输出 ($y(n)=0$) 的要求, 也可证明此系统不是线性的:

$$x(n) = 0 \rightarrow y(n) = 4x(n) + 6 = 6$$

人们一定奇怪, 为什么所给系统的方程明明是一个线性方程, 但又说它一定不是一个

线性系统。实际上,这个系统的输出可以表示成一个线性系统的输出与反映该系统初始储能的零输入响应信号之和,如图 1-17 所示。对于这个系统,其线性系统是

$$T[x(n)] = 4x(n)$$



图 1-17 一种增量线性系统, $y_0(n)$ 是系统的零输入响应

而零输入响应[输入 $x(n)=0$ 时的输出]是

$$y_0(n) = 6$$

实际上,有大量的系统可由图 1-17 表示,而系统的总输出由一个线性系统的响应与一个零输入响应的叠加来构成,这种系统可称为增量线性系统,也就是说,这类系统的响应对输入中的变化部分是呈线性关系的。换言之,对增量线性系统,任意两个输入的响应的差是两个输入差的线性函数(满足可加性和比例性)。

例如

$$x_1(n) \rightarrow y_1(n) = 4x_1(n) + 6$$

$$x_2(n) \rightarrow y_2(n) = 4x_2(n) + 6$$

则

$$y_1(n) - y_2(n) = 4x_1(n) + 6 - [4x_2(n) + 6] = 4[x_1(n) - x_2(n)]$$

同样可证明, $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$ 以及 $y(n) = x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right)$ 都是线性系统。

二、移不变系统

若系统响应与激励加于系统的时刻无关,则称为移不变系统(或称时不变系统)。即若输入 $x(n]$ 产生输出为 $y(n)$, 则输入 $x(n-m]$ 产生输出为 $y(n-m)$, 也就是说输入移动任意位,其输出也移动这么多位,而幅值却保持不变。对移不变系统,若

$$T[x(n)] = y(n)$$

则

$$T[x(n-m)] = y(n-m) \quad (1-20)$$

其中 m 为任意整数。

[例 1-11] 证明 $y(n)=4x(n)+6$ 是移不变系统。

证

$$T[x(n-m)] = 4x(n-m) + 6$$

$$y(n-m) = 4x(n-m) + 6$$

由于二者相等,故是移不变系统。

[例 1-12] 证明 $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$ 是移不变系统。

证

$$T[x(n-k)] = \sum_{m=-\infty}^n x(m-k) = \sum_{m=-\infty}^{n-k} x(m) \quad (m-k=m', m'=m)$$

$$y(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{n-k} x(m)$$

由于二者相等,故系统是移不变系统。

同理可证明, $y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi n}{9} + \frac{\pi}{7}\right)$ 不是移不变系统。

[例 1-13] 设 $y(n) = nx(n)$, 试讨论此系统是否是移不变系统。

解 用上面同样的方法可证明此系统是移变系统,但是如果要证明一个系统不是移不变系统,通常可找一个反例,即找一个特定的输入信号使得移不变系统的条件不成立。本例中我们选特定的输入为 $\delta(n)$

$$x_1(n) = \delta(n) \rightarrow y_1(n) = n\delta(n) = 0$$

$$x_2(n) = x_1(n-1) = \delta(n-1) \rightarrow y_2(n) = \delta(n-1)$$

看出 $x_2(n)$ 是 $x_1(n)$ 的移一位序列,而 $y_2(n)$ 却不是 $y_1(n)$ 的移一位序列,因而此系统是移变系统。

事实上,这个系统是有移变增量(n)的系统,若已知当前的输入值是 1,而不知当前所在的时刻,仍不能确定当前的输出是多少。结论是,若系统有一个移变的增益,则此系统一定是移变系统。下面讨论另一个移变系统的例子。

[例 1-14] 考虑以下系统

$$y(n) = x(2n)$$

试讨论此系统是否是移不变系统。

解 这个系统代表着时间尺度变换的运算,这在序列的运算中已经讨论过了, $x(2n)$ 称为 $x(n)$ 的抽取序列。从直觉上看,任何在输入上的时移都会有一个因子 2 的压缩,因而这个系统就不是移(时)不变的。可以用一个例子来反证这一结论。

设 $x_1(n)$ 为某输入序列,如图 1-18(a) 所示,而它激励得到的输出序列为 $y_1(n) = x_1(2n)$,如图 1-18(b) 所示。若将输入移 2 位,即 $x_2(n) = x_1(n-2)$,如图 1-18(c) 所示,所得到的输出为 $y_2(n) = x_2(2n)$,如图 1-18(d) 所示,而 $y_1(n-2)$ 如图 1-18(e) 所示,比较一下图 1-18(d) 和图 1-18(e) 可看出, $y_2(n) \neq y_1(n-2)$,所以这个系统不是移不变的,实际上, $y_2(n) = y_1(n-1)$,这是由于系统所产生的时间压缩,使得输出的移位只等于移不变时应有的移位的一半。

同时具有线性和移不变性的离散时间系统称为线性移不变(linear shift invariant, LSI)离散时间系统,简称 LSI 系统,除非特殊说明,本书都是研究 LSI 系统。

三、单位抽样响应(单位冲激响应)与卷积和

线性移不变系统可用它的单位抽样响应来表征。单位抽样响应是指输入为单位冲激序列时系统的输出。一般用 $h(n)$ 表示单位抽样响应,即

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1-21)$$

知道 $h(n)$ 后,就可得到此线性移不变系统对任意输入的输出。讨论如下:

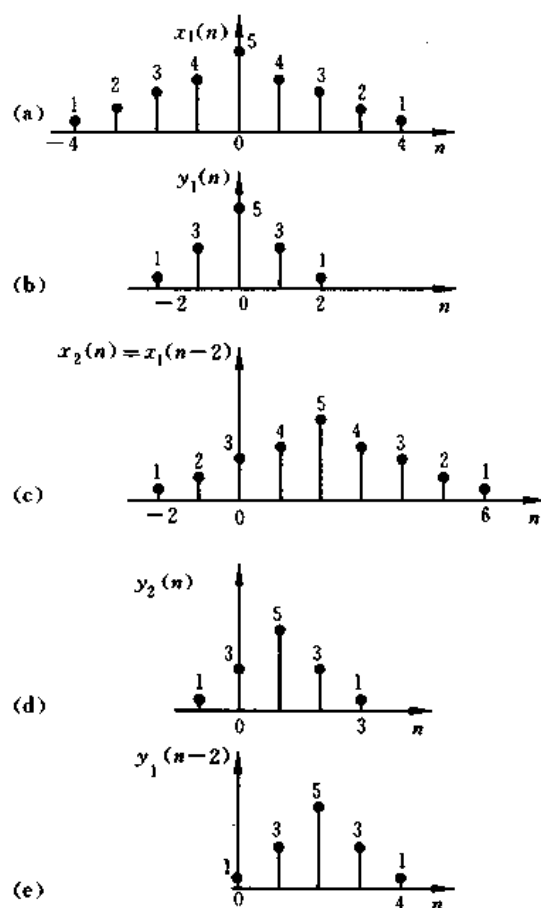


图 1-18 $y(n)=x(2n)$ 系统

(a) 输入 $x_1(n)$; (b) 对应于 $x_1(n)$ 的输出 $y_1(n)$; (c) 输入 $x_2(n)=x_1(n-2)$
(d) 对应于 $x_2(n)$ 的输出 $y_2(n)$; (e) 移位信号 $y_1(n-2)$

设系统输入序列为 $x(n)$, 输出序列为 $y(n)$ 。从式(1-16)已经知道, 任一序列 $x(n)$ 可写成 $\delta(n)$ 的移位加权和, 即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

则系统的输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] \quad (\text{线性系统满足比例性可加性}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (\text{移不变性}) \end{aligned} \quad (1-22)$$

这就是线性移不变系统的卷积和表达式, 这是一个非常重要的表达式。卷积和的运算方法在前面 1.1 节中已经讨论过了。如前所述可表示成

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1-23)$$

用图表示如图 1-19 所示。

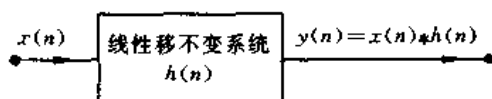


图 1-19 线性移不变系统

四、线性移不变系统的性质

1. 交换律

由于卷积和与两卷积序列的次序无关,故

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1-24)$$

这就是说,如果把单位冲激响应 $h(n)$ 改作为输入,而把输入 $x(n)$ 改作为系统单位冲激响应,则输出 $y(n)$ 不变,如图 1-20 所示。

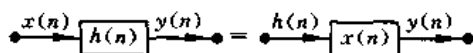


图 1-20 卷积和服从交换律

2. 结合律

可以证明卷积和运算服从结合律,即

$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \end{aligned} \quad (1-25)$$

这就是说,两个线性移不变系统级联后仍构成一个线性移不变系统,其单位抽样响应为两系统单位抽样响应的卷积和,且线性移不变系统的单位抽样响应与它们的级联次序无关,如图 1-21 所示。

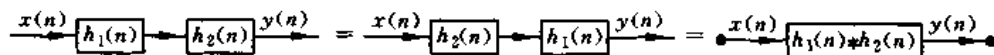


图 1-21 具有相同单位抽样响应的三个系统

3. 分配律

卷积和满足以下关系:

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1-26)$$

也就是说,两个线性移不变系统的并联(等式右端)等效于一个系统,此系统的单位抽样响应等于两系统各自单位抽样响应之和(等式左端)。如图 1-22 所示。

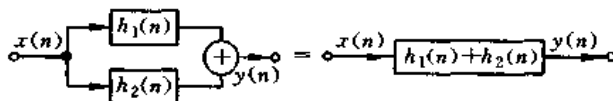


图 1-22 线性移不变系统的并联组合

以上三个性质,交换律前面已经证明了,另外两个性质由卷积和的定义可以很容易加

以证明,留给读者作练习。

【例 1-15】 如图 1-23 所示。两线性移不变系统级联,其单位抽样响应分别为 $h_1(n)$, $h_2(n)$, 输入为 $x(n)$, 设

$$\begin{aligned} x(n] &= u(n), \\ h_1(n] &= \delta(n) - \delta(n-4), \\ h_2(n] &= a^n u(n), \quad |a| < 1 \end{aligned}$$

求系统的输出 $y(n)$ 。

解 设级联的第一个系统的输出为 $w(n)$, 如图 1-23 所示, 则

$$\begin{aligned} w(n] &= x(n] * h_1(n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m] h_1(n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} u(m] h_1(n-m] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} u(m] [\delta(n-m] - \delta(n-m-4)] = u(n] - u(n-4) \\ &= \delta(n] + \delta(n-1] + \delta(n-2] + \delta(n-3] = R_4(n) \end{aligned}$$

因而输出为

$$\begin{aligned} y(n] &= w(n] * h_2(n] = [\delta(n] + \delta(n-1] + \delta(n-2] + \delta(n-3)] * h_2(n] \\ &= h_2(n] + h_2(n-1] + h_2(n-2] + h_2(n-3] \\ &= a^n u(n] + a^{n-1} u(n-1] + a^{n-2} u(n-2] + a^{n-3} u(n-3] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y(n] &= 0, & n < 0 \\ y(0] &= 1, & n = 0 \\ y(1] &= 1 + a, & n = 1 \\ y(2] &= 1 + a + a^2, & n = 2 \\ y(n] &= a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3}, & n \geq 3 \end{aligned}$$

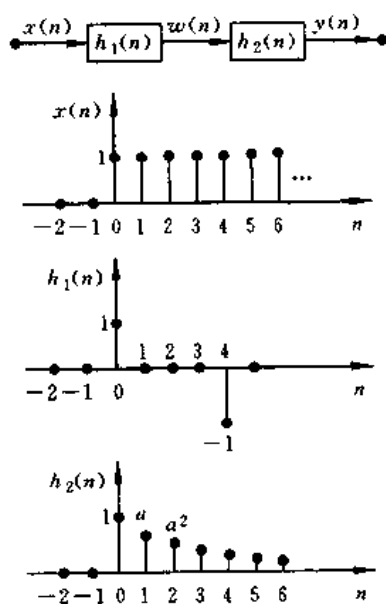


图 1-23 级联系统的例子

五、因果系统

因果系统是指某时刻的输出只取决于此时刻和此时刻以前时刻的输入的系统,即 $n=n_0$ 的输出 $y(n_0)$ 只取决于 $n \leq n_0$ 的输入 $x(n) |_{n \leq n_0}$ 。对于因果系统,如果 $n < n_0, x_1(n) = x_2(n)$, 则 $n < n_0$ 时 $y_1(n) = y_2(n)$ 。如果系统现在的输出还取决于未来的输入,则不符合因果关系,因而是非因果系统,是不实际的系统。

因果系统当然很重要,但是并不是所有有实际意义的系统都是因果系统,例如在图像处理中,变量不是时间,这时,因果性往往不是根本性的限制;此外,非实时情况下,待处理数据事先都已记录下来,例如语音处理、气象、地球物理学等,在这种情况下,决不会局限于用因果系统来处理这类数据。例如,为了去除噪声或高频的变化,而保留总的缓慢变化的趋势,常常采用对数据取平均的办法

$$y(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x(n-k)$$

这就是一个起平滑作用的非因果系统。

请读者自己证明, $y(n) = nx(n)$ 的系统是一个因果系统,而 $y(n) = x(n+2) + ax(n)$ 及 $y(n) = x(n^3)$ 的系统是非因果系统。当然, $y(n) = x(-n)$ 的系统也是非因果系统,虽然 $n > 0$ 的输出取决于 $n < 0$ 的输入,好像此系统是因果性的,但是,我们必须从全部时间上看输入输出关系, $n < 0$ 的输出决定于 $n > 0$ 时的输入(即将来的输入)。因此,此系统是非因果性的。

另外,在考查系统的因果性时,必须把输入信号的影响与系统定义中用到的其他函数的影响区别开来,例如,对如下系统

$$y(n) = x(n) \sin(n+2)$$

我们在研究因果性时,只看输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 的关系,而不讨论 $\sin(n+2)$ 这一个以时间 n 为变量的函数的影响,显然,这一系统是因果性的。

线性移不变系统是因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1-27)$$

证 充分条件:若 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$, 则

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$$

因而

$$y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x(m)h(n_0-m)$$

所以 $y(n_0)$ 只和 $m \leq n_0$ 时的 $x(m)$ 值有关,因而系统是因果系统。

必要条件:利用反证法来证明。已知为因果系统,如果假设 $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 则

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

在所设条件下,第二个 \sum 式至少有一项不为零, $y(n)$ 将至少和 $m > n$ 时的一个 $x(m)$ 值有关,这不符合因果性条件,所以假设不成立。因而 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$ 是必要条件。

更一般地说,对于一个线性系统,它的因果性就等效于初始松弛(initial rest)的条件。

依照此定义,我们将 $n < 0, x(n) = 0$ 的序列称为因果序列,表示这个因果序列可以作为一个因果系统的单位抽样响应。

频率特性为理想矩形的理想低通滤波器以及理想微分器等都是非因果的不可实现的系统。但是如果不是实时处理,或虽实时但允许有很大的延时,则可把“将来”的输入值存储起来以备调用。那么可用具有很大延时的因果系统去逼近非因果系统,这是数字系统优于模拟系统的地方。

六、稳定系统

稳定系统是指有界输入产生有界输出(BIBO)的系统。

若 $|x(n)| \leq M < \infty$
 则 $|y(n)| \leq P < \infty$

一个线性移不变系统是稳定系统的充分且必要的条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = P < \infty \quad (1-28)$$

即单位抽样响应绝对可和。证明如下:

证 充分条件:若

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = P < \infty$$

如果输入信号 $x(n)$ 有界,即对于所有 n 皆有 $|x(n)| \leq M$, 则

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x(m)| \cdot |h(n-m)| \\ &\leq M \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(n-m)| = M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = MP < \infty \end{aligned}$$

即输出信号 $y(n)$ 有界,故原条件是充分条件。

必要条件:利用反证法。已知系统稳定,假设

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$$

我们可以找到一个有界的输入为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & h(-n) \geq 0 \\ -1, & h(-n) < 0 \end{cases}$$

则

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| = \infty$$

即在 $n=0$ 输出无界,这不符合稳定的条件,因而假设不成立。所以 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ 是稳定的必要条件。

要证明一个系统不稳定,只需找一个特别的有界输入,如果此时能得到一个无界的输出,那么就一定能判定这个系统是不稳定的。但是要证明一个系统是稳定的,就不能只用

某一个特定的输入作用来证明,而要利用在所有有界输入下都产生有界输出的办法来证明系统的稳定性。例如,有两个系统 s_1 及 s_2 分别满足

$$\begin{aligned} s_1: & \quad y(n) = nx(n) \\ s_2: & \quad y(n) = a^{x(n)}, \quad a \text{ 为正整数} \end{aligned}$$

对于 s_1 系统,可任选一个有界输入函数,例如 $x(n)=1$,则得 $y(n)=n$,这时 $y(n)$ 显然是无界的,($y(n)$ 随 n 的增加而增加)因此 s_1 系统是不稳定的。对于 s_2 系统,要证明它的稳定性,就要考虑所有可能的有界输入下都产生有界输出,令 $x(n)$ 为有界函数,即对任意 n ,有

$$|x(n)| < A$$

即

$$-A < x(n) < A$$

A 为任意正数,此时必须满足

$$a^{-A} < y(n) < a^A$$

这说明输入有界由某一正数 A 所界定,则输出一定由 a^A 所界定,因而系统是稳定的。

我们的结论是,因果稳定的线性移不变系统的单位抽样响应是因果的(单边的)且是绝对可和的,即

$$\left. \begin{aligned} h(n) &= h(n)u(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| &< \infty \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

[例 1-16] 设某线性移不变系统,其单位抽样响应为

$$h(n) = a^n u(n)$$

(1) 讨论因果性: $n < 0$ 时, $h(n) = 0$,故此系统是因果系统。

(2) 讨论稳定性:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \begin{cases} \frac{1}{1-|a|}, & |a| < 1 \\ \infty, & |a| \geq 1 \end{cases}$$

所以 $|a| < 1$ 时,系统是稳定的。当 a 为实数, $0 < a < 1$ 时, $h(n)$ 如图 1-12 所示;当 $a > 1$ 时, $h(n)$ 如图 1-24 所示。

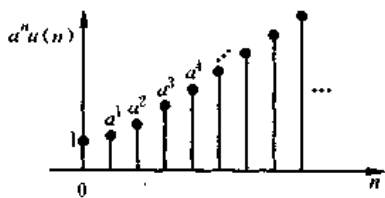


图 1-24 $h(n)=a^n u(n)$ 的图形 (a 实数, $a > 1$)

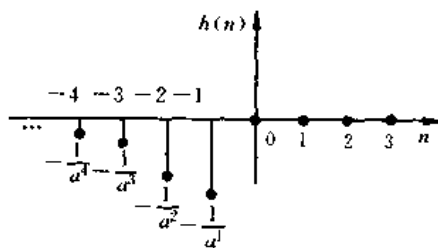


图 1-25 $h(n)=-a^n u(-n-1)$ 的图形 ($a > 1$)

[例 1-17] 设某线性移不变系统,其单位抽样响应为

$$h(n) = -a^n u(-n-1)$$

(1) 讨论因果性: $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$,故此系统是非因果系统。

(2) 讨论稳定性:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a|^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a|^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{|a|}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|a| - 1}, & |a| > 1 \\ \infty, & |a| \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

所以 $|a| > 1$ 时,系统是稳定的。当 a 为实数, $a > 1$ 时, $h(n)$ 如图 1-25 所示。

1.3 常系数线性差分方程

连续时间线性时不变系统的输入输出关系常用常系数线性微分方程表示,而离散时间线性移不变系统的输入输出关系常用以下形式的常系数线性差分方程表示,即

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad (1-30)$$

所谓常系数是指 $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_M$ (它们决定系统的特征)是常数。若系数中含有 n ,则称为“变系数”线性差分方程。差分方程的阶数等于未知序列[指 $y(n)$]变量序号的最高值与最低值之差。例如 (1-22) 式,即为 N 阶差分方程(变量序号从 $k=0$ 到 $k=N$,故为 $N-0=N$ 阶差分方程)。

所谓线性是指各 $y(n-k)$ 以及各 $x(n-k)$ 项都只有一次幂且不存在它们的相乘项(这和线性微分方程是一样的)否则就是非线性的。

求解常系数线性差分方程可以用序列域(离散时域)求解法,也可以用变换域求解法。

序列域求解法有两种:(1)迭代法,此法较简单,但是只能得到数值解,不易直接得到闭合形式(公式)解答;(2)卷积和计算法,这用于系统起始状态为零时(即所谓松弛系统)的求解,或说求零状态解。

变换域求解法与连续时间系统的拉普拉斯变换法相类似,它采用 z 变换方法来求解差分方程,这在实际使用上是简便而有效的。卷积和方法,前面已经讨论到了,只要知道冲激响应就能得知任意输入时的输出响应。 z 变换方法将在 z 变换一章中讨论。这里仅简单讨论离散时域的迭代解法。

用迭代法求解差分方程——求单位抽样响应

在本书讨论的范围内,数字滤波器系统都是所谓松弛系统,即起始状态为零,系统无初始储能。因而,单位抽样 $\delta(n)$ 作用下产生的系统响应 $h(n)$ (零状态解)就完全能代表系统。前面说过, $h(n)$ 称为单位抽样响应,有了 $h(n)$,则任意输入下的系统输出就可利用卷积和而求得。

差分方程在给定输入和给定边界(起始)条件下,可用迭代的办法求系统的响应。如果输入是 $\delta(n)$ 这一特定情况,响应就是单位抽样响应 $h(n)$ 。例如,利用 $\delta(n)$ 只在 $n=0$ 取值为 1 的特点,可用迭代法求出其单位冲激响应 $h(0), h(1), \dots, h(n)$ 值,下面举例说明。

[例 1-18] 常系数线性差分方程

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

试求其单位抽样响应(初始状态为 $y(-1)=0$)。

解 设 $x(n)=\delta(n)$, 且 $y(-1)=h(-1)=0$, 必有

$$y(n)=h(n)=0, n < 0 [\delta(n) \text{ 作用下, 输出 } y(n) \text{ 就是 } h(n)]$$

还可得
$$h(0) = ah(-1) + 1 = 0 + 1 = 1$$

依次迭代求得

$$h(1) = ah(0) + 0 = a + 0 = a$$

$$h(2) = ah(1) + 0 = a^2 + 0 = a^2$$

\vdots

$$h(n) = ah(n-1) + 0 = a^n + 0 = a^n$$

故系统的单位抽样响应为

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = a^n u(n)$$

这样的系统相当于因果系统, 如果 $|a| < 1$, 则系统是稳定的。

一个常系数线性差分方程并不一定代表因果系统, 例如边界条件假设不同, 则可得到非因果系统。利用同一例子, 分析如下。

设 $x(n)=\delta(n)$, 但边界条件假设 $y(0)=0$, 可得 $n > 0$ 时 $y(n)=h(n)=0$, 将(1-30)式改写为另一种递推关系

$$y(n-1) = \frac{1}{a}[y(n) - x(n)]$$

或

$$y(n) = \frac{1}{a}[y(n+1) - x(n+1)]$$

又利用已得出的结果

$$h(n) = 0, \quad n > 0$$

则

$$h(0) = \frac{1}{a}[h(1) - x(1)] = 0$$

$$h(-1) = \frac{1}{a}[h(0) - x(0)] = -a^{-1}$$

$$h(-2) = \frac{1}{a}[h(-1) - x(-1)] = -a^{-2}$$

\vdots

$$h(n) = \frac{1}{a}h(n+1) = -a^n$$

所以

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -a^n, & n < 0 \end{cases}$$

也可表示为

$$h(n) = -a^n u(-n-1)$$

这样的系统是非因果系统,如果 $|a| > 1$,则系统是稳定的。

同样,一个常系数线性差分方程,只有当边界条件选的合适时(也就是齐次解合适时)才相当于一个线性移不变系统。例如(1-30)式所表示的差分方程,当边界条件选为 $y(0) = 1$ 时,系统不是移不变系统,也不是线性系统;当边界条件选为 $y(0) = 0$ 时,系统相当于线性系统但不是移不变系统;只有边界条件选为 $y(-1) = 0$ 时,该系统才相当于线性移不变系统。下面我们只证明边界条件 $y(0) = 1$ 的结论。

[例 1-19] 常系数线性差分方程为

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

边界条件为 $y(0) = 1$,试说明它是否是线性移不变系统。

解 (1) 令 $x_1(n) = \delta(n)$, $y_1(0) = 1$

则

$$y_1(1) = ay_1(0) + x_1(1) = a$$

$$y_1(2) = ay_1(1) + x_1(2) = a^2$$

\vdots

$$y_1(n) = ay_1(n-1) + x_1(n) = a^n$$

同样利用

$$y(n-1) = \frac{1}{a} [y(n) - x(n)]$$

可递推求得

$$y_1(n) = 0, n \leq -1$$

所以

$$y_1(n) = a^n u(n)$$

令

$$x_2(n) = \delta(n-1), \quad y_2(0) = 1$$

则

$$y_2(1) = ay_2(0) + x_2(1) = a + 1$$

$$y_2(2) = ay_2(1) + x_2(2) = a^2 + a$$

\vdots

$$y_2(n) = ay_2(n-1) + x_2(n) = a^n + a^{n-1}$$

同样可递推求得

$$y_2(n) = a^n, n \leq -1$$

所以

$$y_2(n) = a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1) + a^n u(-n-1)$$

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 为移一位关系,但 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 不是移一位关系,因而系统不是移不变系统。

(2) 前已证明

$$x_1(n) = \delta(n) \rightarrow y_1(n) = a^n u(n)$$

$$x_2(n) = \delta(n-1) \rightarrow y_2(n) = a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1)$$

令

$$x_3(n) = x_1(n) + x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1), \quad y_3(0) = 1$$

则得

$$\begin{aligned} y_3(1) &= ay_3(0) + x_3(1) = a + 1 \\ y_3(2) &= ay_3(1) + x_3(2) = a^2 + a \\ &\vdots \\ y_3(n) &= ay_3(n-1) + x_3(n) = a^n + a^{n-1} \end{aligned}$$

同样可递推求得

$$y_3(n) = 0, n \leq -1$$

所以

$$y_3(n) = a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1)$$

又

$$y_1(n) + y_2(n) = 2a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1) + a^n u(-n-1)$$

所以

$$y_3(n) \neq y_1(n) + y_2(n)$$

因此,这个系统不是线性系统。

另外两个边界条件下的结论,已放入本章习题中,请读者依照此例自己证明。

但是在以下的讨论中,都假设常系数线性差分方程就代表线性移不变系统,且多数代表可实现的因果系统。

差分方程表示法的另一优点是可以直接得到系统的结构。当然我们这里所指的结构是将输入变换成输出的运算结构,而非实际结构。例如一个一阶差分方程为

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1)$$

则运算结构如图 1-26 所示。 $b_0 x(n)$ 表示将输入 $x(n)$ 乘上常数 b_0 , $-a_1 y(n-1)$ 表示将序列 $y(n)$ 延时一位后乘以常数 $-a_1$, 将此两个结果相加就得到 $y(n)$ 序列。图中 \oplus 代表相加器, \otimes 代表乘法器, z^{-1} 代表延时一位的延时单元。这是方框图表示法,后面我们还将引出比它简单的流图表示法。

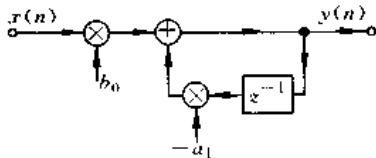


图 1-26 一阶差分方程的运算结构

1.4 连续时间信号的抽样

现在我们来讨论连续时间信号与离散时间信号的关系。由前者变为后者是通过“抽样”来完成的,如图 1-27 所示。抽样就是利用周期性抽样脉冲序列 $p(t)$, 从连续信号 $x_a(t)$ 中抽取一系列的离散值, 得到抽样信号(或称抽样数据信号)即离散时间信号, 以 $\hat{x}_a(t)$ 表示。抽样是模拟信号数字化处理的第一个环节。 $\hat{x}_a(t)$ 再经幅度量化编码后即得到数字信号。

抽样器可以看成是一个电子开关,如图 1-27(a) 所示。开关每隔 T 秒闭合一次(对

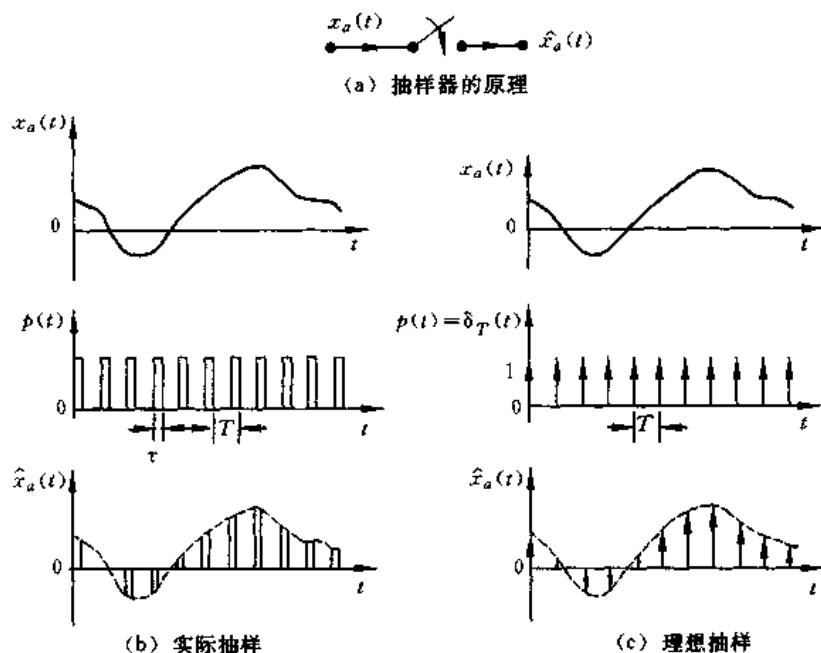


图 1-27 连续时间信号的抽样

理想抽样, 闭合时间应无穷短, 对实际抽样, 闭合时间是 τ 秒, 但 $\tau \ll T$ 使输入信号得以抽样, 得到连续信号的抽样输出信号。

我们要研究的是, 信号被抽样后其频谱将会有什么变化? 在什么条件下, 可从抽样数据信号 $\hat{x}_a(t)$ 中不失真地恢复出原来信号 $x_a(t)$?

抽样过程可以看成脉冲调幅, $x_a(t)$ 为调制信号, 被调脉冲载波是周期为 T 的周期性脉冲串。当脉冲宽度为 τ 时, 可得实际抽样, 当脉冲宽度 $\tau \rightarrow 0$ 时, 得到的是理想抽样。理想抽样的概念对后面的讨论 (例如 z 变换) 是很重要的, 所以我们先来讨论它。

一、理想抽样

当 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况 (当 $\tau \ll T$ 时, 就可近似看成理想抽样), 此时抽样脉冲序列 $p(t)$ 变成冲激函数序列 $\delta_T(t)$, 而各冲激函数准确地出现在抽样瞬间上, 面积为 1, 抽样后输出理想抽样信号的面积 (即积分幅度) 则准确地等于输入信号 $x_a(t)$ 在抽样瞬间的幅度。理想抽样过程可见图 1-27(c)。冲激函数序列 $\delta_T(t)$ 为

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (1-31)$$

理想抽样输出为 $\hat{x}_a(t)$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t) \quad (1-32)$$

把 (1-31) 式代入 (1-32) 式, 得

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - mT) \quad (1-33)$$

由于 $\delta(t - mT)$ 只在 $t = mT$ 时不为零, 故

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)\delta(t-mT) \quad (1-34)$$

下面讨论理想抽样后信号频谱发生的变化。由于在连续时间信号与系统中已学过, (1-32)式表示时域相乘, 则频域(傅里叶变换域)为卷积运算。所以由(1-32)式的关系可知, 若各傅里叶变换分别表示为

$$X_a(j\Omega) = \text{DTFT}[x_a(t)]$$

$$\Delta_T(j\Omega) = \text{DTFT}[\delta_T(t)]$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \text{DTFT}[\hat{x}_a(t)]$$

其中, DTFT 表示离散时间信号的傅里叶变换, 则应满足[对(1-32)式两端取傅里叶变换]

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}[\Delta_T(j\Omega) * X_a(j\Omega)] \quad (1-35)$$

$X_a(j\Omega)$ 可表示为

$$X_a(j\Omega) = \text{DTFT}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1-36)$$

现在来求 $\Delta_T(j\Omega) = \text{DTFT}[\delta_T(t)]$, 由于 $\delta_T(t)$ 是周期函数, 可表示成傅里叶级数, 即

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\Omega_s t}$$

此级数的基频为抽样频率, 即

$$f_s = \frac{1}{T}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

而系数则可表示成

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

以上结果的得出是考虑到在 $|t| < T/2$ 的区间内, 只有一个冲激 $\delta(t)$, 而 $m \neq 0$ 时, $\delta(t-mT)$ 都在积分区间之外, 且利用了以下关系

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt$$

因而

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} \quad (1-37)$$

由此得出

$$\Delta_T(j\Omega) = \text{DTFT}[\delta_T(t)] = \text{DTFT}\left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{DTFT}[e^{jk\Omega_s t}]$$

由于

$$\text{DTFT}[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1-38)$$

所以

$$\Delta_T(j\Omega) = \text{DTFT}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1-39)$$

图 1-28 表示了 $\delta_T(t)$ 和 $\Delta_T(j\Omega)$ 。

将(1-39)式代入(1-35)式可得

$$\begin{aligned}
 X_s(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) * X_s(j\Omega) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_s(j\theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_s(j\theta) \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s(j\Omega - jk\Omega_s) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s \left(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T} \right)
 \end{aligned} \tag{1-40}$$

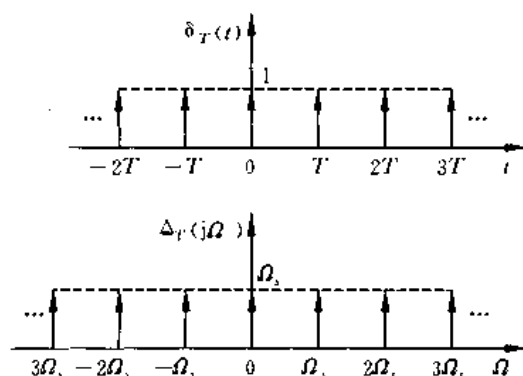


图 1-28 周期冲激序列 $\delta_T(t)$ 与它的傅里叶变换 $\Delta_T(j\Omega)$

由此看出,一个连续时间信号经过理想抽样后,其频谱将以抽样频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ 为间隔而重复,这就是频谱产生周期延拓,如图 1-29 所示,因为频谱是复数,故只画了其幅度。也就是说,理想抽样信号的频谱,是频率的周期函数,其周期为 Ω_s ,而频谱的幅度则受 $\frac{1}{T} = \frac{\Omega_s}{2\pi}$ 加权,由于 T 是常数(不是 Ω 的函数),所以除了一个常数因子区别外,每一个延拓的谱分量都和原频谱分量相同。因此只要各延拓分量与原频谱分量不发生频率上的交叠,则有可能恢复出原信号。也就是说,如果 $x_s(t)$ 是限带信号其频谱如图 1-29(a)所示。且最高频谱分量 Ω_h 不超过 $\Omega_s/2$,即

$$X_s(j\Omega) = \begin{cases} X_s(j\Omega), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases} \tag{1-41}$$

那么原信号的频谱和各次延拓分量的谱彼此不重叠,如图 1-29(b)所示。这时采用一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器,就可得到不失真的原信号频谱,也就是说,可以不失真地还原出原来的连续信号。

如果信号的最高频谱 Ω_h 超过 $\Omega_s/2$,则各周期延拓分量产生频谱的交叠,称为混叠现

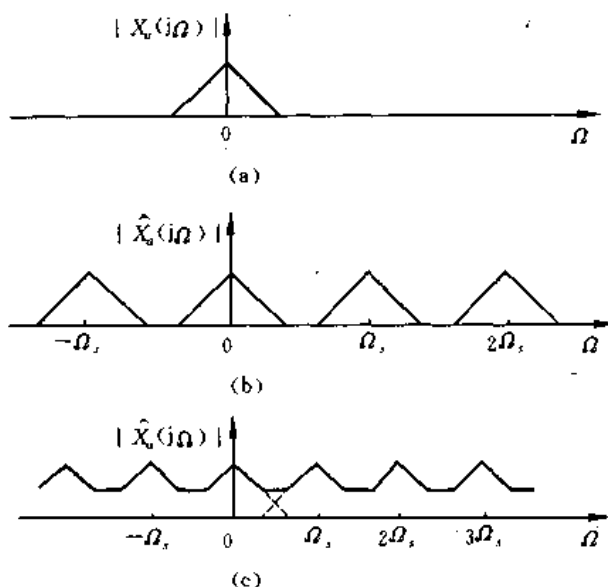


图 1-29 抽样后, 频谱的周期延拓

(a) 原限带信号; (b) $\Omega_s > 2\Omega_h$ 时; (c) $\Omega_s < 2\Omega_h$ 时产生频谱混叠现象

象, 如图 1-29(c) 所示。由于 $X_a(j\Omega)$ 一般是复数, 所以混叠也是复数相加。我们将抽样频率之半 ($\Omega_s/2$) 称为折叠频率, 即

$$\frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad (1-42)$$

它如同一面镜子, 当信号频谱超过它时, 就会被折叠回来, 造成频谱的混叠。

由此得出结论: 要想抽样后能够不失真的还原出原信号, 则抽样频率必须大于两倍信号谱的最高频率 ($\Omega_s > 2\Omega_h$), 这就是奈奎斯特抽样定理。即

$$f_s > 2f_h \quad (1-43)$$

为了避免混叠, 一般在抽样器前加入一个保护性的前置低通滤波器, 称为防混叠滤波器, 其截止频率为 $\Omega_s/2$, 以便滤除掉高于 $\Omega_s/2$ 的频率分量。

同样方法, 可以证明 [亦可代 $j\Omega = s$ 到 (1-40) 式], 理想抽样后, 使信号的拉普拉斯变换在 s 平面上沿虚轴周期延拓, 也就是说 $X_a(s)$ 在 s 平面虚轴上是周期函数

$$X_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) \quad (1-44)$$

其中

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-st} dt$$

$$\hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt$$

即 $X_a(s)$, $\hat{X}_a(s)$ 分别是 $x_a(t)$, $\hat{x}_a(t)$ 的双边拉普拉斯变换。

抽样的恢复: 如果满足奈奎斯特抽样定理, 即信号谱的最高频率小于折叠频率, 则抽样后不会产生频谱混叠, 由 (1-40) 式知

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$

故将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过以下理想低通滤波器(如图 1-30 所示);

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

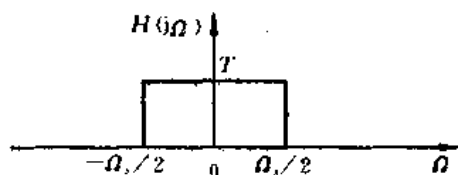


图 1-30 理想低通滤波器特性

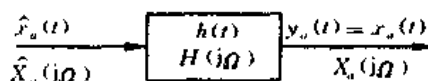


图 1-31 抽样的恢复

就可得到原信号频谱,如图 1-31 所示,即

$$Y_a(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega) H(j\Omega) = X_a(j\Omega)$$

所以输出端即为原模拟信号

$$y_a(t) = x_a(t)$$

理想低通滤波器虽不可实现,但是在一定精度范围内,可用一个可实现的滤波器来逼近它。

下面讨论如何由抽样值来恢复原来的模拟信号(连续时间信号),即 $\hat{x}_a(t)$ 通过 $H(j\Omega)$ 系统的响应特性。

理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin\left[\frac{\Omega_s}{2}t\right]}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}t\right]}{\frac{\pi}{T}t}$$

由 $\hat{x}_a(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分,即得理想低通滤波器的输出为

$$\begin{aligned} y_a(t) &= x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - mT) \right] h(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h(t-\tau) \delta(\tau - mT) d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) h(t-mT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-mT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)} \end{aligned} \quad (1-45)$$

这就是抽样内插公式,即由信号的抽样值 $x_a(mT)$ 经此公式而得到连续信号 $x_a(t)$,而 $\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-mT)\right]/\frac{\pi}{T}(t-mT)$ 称为内插函数,如图 1-32 所示,在抽样点 mT 上,函数值为 1,在其余抽样点上,函数值为零。也就是说, $x_a(t)$ 等于各 $x_a(mT)$ 乘上对应的内插函数的总和。在每一个抽样点上,只有该点所对应的内插函数不为零,这使得各抽样点上信号值不变,而抽样点之间的信号则由各加权抽样函数波形的延伸叠加而成,如图 1-33 所示。这个公式说明了,只要抽样频率高于两倍信号最高频率,则整个连续信号就可完全用它的抽样值来代表,而不会丢掉任何信息。这就是奈奎斯特抽样定理的意义。但是,由上面讨论可看出抽样内插公式只限于使用到限带(频带有限)信号上。

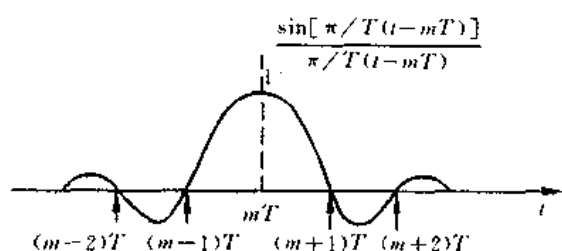


图 1-32 内插函数

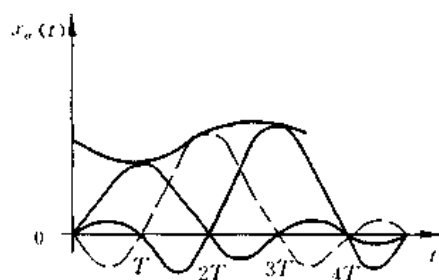


图 1-33 抽样的内插恢复

二、实际抽样

实际情况中,抽样脉冲不是冲激函数,而是一定宽度 τ 的矩形周期脉冲 $p(t)$ (实际抽样过程见图 1-27(b) 所示),这时奈奎斯特抽样定理是否仍然有效? 我们就来分析它。

由于 $p(t)$ 是周期函数,故仍可展成傅里叶级数

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_s t} \quad (1-46)$$

同样可求出 $p(t)$ 的傅里叶系数 C_k (注意, $p(t)$ 的幅度为 1)

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_0^\tau e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{k\Omega_s \tau}{2}\right)}{\frac{k\Omega_s \tau}{2}} e^{-j\frac{k\Omega_s \tau}{2}} \quad (1-47)$$

如果 τ, T 一定,则随着 k 的变化, C_k 的幅度 $|C_k|$ 将按

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{k\Omega_s \tau}{2}\right)}{\frac{k\Omega_s \tau}{2}} \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

而变化,其中 $x = \frac{k\Omega_s \tau}{2}$ 。作类似于(1-40)式的同样推导,但需注意用 C_k 代替那里的 $A_k = \frac{1}{T}$,而 C_k 是随 k 而变化的,这样可得到实际抽样时,抽样数据信号的频谱为

$$X_a(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (1-48)$$

由此看出,和理想抽样一样,抽样数据信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓,因此,如果满足奈奎斯特抽样定理,则不会产生频谱的混叠失真。和理想抽样不同点是,这里频谱分量的幅度有变化,其包络是随频率增加而逐渐下降的,如图 1-34 所示。

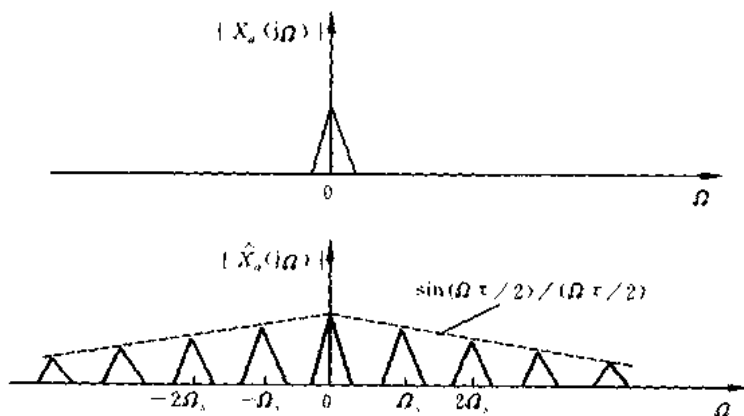


图 1-34 实际抽样时,频谱包络的变化

由图可知

$$C_k = \frac{\tau}{T} \left[e^{-j\frac{\Omega_s k \tau}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\Omega_s k \tau}{2}\right)}{\frac{\Omega_s k \tau}{2}} \right]_{\Omega = k\Omega_s}$$

由于包络的第一个零点出现在

$$\frac{\sin\left(\frac{k\Omega_s \tau}{2}\right)}{\frac{k\Omega_s \tau}{2}} = 0$$

这要求

$$\frac{k\Omega_s \tau}{2} = \frac{k}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \tau = \pi$$

所以

$$k = \frac{T}{\tau}$$

由于 $T \gg \tau$, 因此 $X_s(j\Omega)$ 包络的第一个零出现在 k 很大的地方。

包络的变化并不影响信号的恢复,因为我们只需取系数为 $C_0 = \left(C_n = \frac{\tau}{T}\right)$ 的那一项 [见(1-48)式],它是常数(τ, T 固定时),只是幅度有所缩减,所以只要没有频率混叠,抽样内插恢复是没有失真的,因而奈奎斯特抽样定理仍然有效。

三、正弦信号的抽样

连续时间正弦信号是很重要的一种信号,不管是理论研究上还是在信号处理的实际应用中,它都有着广泛的应用,例如,常用正弦信号加白噪声作为输入信号来研究某一实际系统或某一算法的性能。因此,正弦信号的抽样就很重要了。设连续时间正弦信号为

$$x(t) = A\sin(\Omega_0 t + \varphi) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (1-49)$$

由于这一正弦信号频谱为在 f_0 处的 δ 函数, 因而对它的抽样, 就会遇到一些特殊问题。

对于正弦信号来说, 抽样频率 f_s 必须大于 (而不是等于) $2f_0$, 因为如果 $\varphi=0$, 当 $f_s=2f_0$ 时, 则一周期抽样的两个点为 $x(0)=x(1)=0$, 显然不包含原信号的任何信息。当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时, $x(0)=A, x(1)=-A$, 这时从 $x(n)$ 可以重建 $x(t)$ 。当 φ 为未知时, 则得不到 $x(t)$ 。所以抽样定理要求抽样频率大于信号最高频率的两倍, 而不是大于或等于两倍。

对于两个不同频率的正弦信号 $x_1(t), x_2(t)$, 如果用同一抽样频率对其抽样, 抽样出的序列可能是一样的, 则我们无法判断它是来源于 $x_1(t)$ 还是 $x_2(t)$, 例如设 $x_1(t), x_2(t)$ 分别为

$$x_1(t) = \cos(2\pi \times 40t), \quad f_1 = 40\text{Hz}$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi \times 140t), \quad f_2 = 140\text{Hz}$$

如果用 $f_s=100\text{Hz}$ 对这两个信号抽样, 可以看出, $x_1(t)$ 的抽样满足抽样定理, $x_2(t)$ 的抽样则不满足。抽样后的序列为

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi \times \frac{40n}{f_s}\right) = \cos\left(\frac{4}{5}n\pi\right)$$

$$x_2(n) = \cos\left(2\pi \times \frac{140n}{f_s}\right) = \cos\left(\frac{14}{5}n\pi\right) = \cos\left(\frac{4}{5}n\pi\right)$$

它们都是 5 点的周期序列, 其基本周期内的序列值为 $\{1, -0.809, 0.309, 0.399, -0.809\}$, 我们无法判断这个序列到底是来自 $x_1(t)$ 还是 $x_2(t)$ 。

这里不对正弦信号的抽样作更深入的讨论, 有兴趣的读者, 可见参考文献^[28]。这里我们仅作一些结论性的归纳:

1. 对(1-49)式的正弦信号, 当抽样频率 $f_s=2f_0$ 时, 当 $\varphi=0$ 时无法恢复原信号 $x(t)$; 当 $\varphi=\pi/2$ 时可以由 $x(n)$ 重建原信号; 当 φ 为已知且 $0<\varphi<\pi/2$ 时, 则恢复的不是原信号, 而是 $x'(t)=A(\sin\varphi)\cos\Omega_0 t$, 经过移位和幅度变换, 仍可得到原信号; 如果 φ 未知, 则根本得不到原信号。

2. 对(1-49)式的信号, 由于有三个未知数, 只要保证在它的一个周期内均匀地抽得三个样值, 即可由 $x(n)$ 准确地重建 $x(t)$ 。

3. 对离散周期的正弦信号, 作截断时, 其截断长度必须为此周期信号周期的整倍数, 才不会产生离散频谱的泄漏。

4. 正弦信号的抽样不宜补零, 否则将产生频域泄漏。

5. 考虑到做 DFT 时, 要求数据点数 N 最好为 2 的整次幂, 因而建议对正弦信号抽样时, 一个周期内最好抽 4 个点。

习 题

1. 直接计算下面两个序列的卷积和 $y(n)=x(n)*h(n)$

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$x(n) = \begin{cases} \beta^{n-n_0}, & n_0 \leq n \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$

请用公式表示。

2. 已知线性移不变系统的输入为 $x(n]$, 系统的单位抽样响应为 $h(n]$, 试求系统的输出 $y(n]$, 并画图。

- (1) $x(n) = \delta(n]$, $h(n) = R_5(n]$
- (2) $x(n) = R_3(n]$, $h(n) = R_4(n]$
- (3) $x(n) = \delta(n-2]$, $h(n) = 0.5^* R_3(n]$
- (4) $x(n) = 2^n u(-n-1]$, $h(n) = 0.5^n u(n]$

3. 已知 $h(n) = a^{-n} u(-n-1]$, $0 < a < 1$, 通过直接计算卷积和的办法, 试确定单位抽样响应为 $h(n]$ 的线性移不变系统的阶跃响应。

4. 判断下列每个序列是否是周期性的, 若是周期性的, 试确定其周期。

- (1) $x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$
- (2) $x(n) = A \sin\left(\frac{13}{3}\pi n\right)$
- (3) $x(n) = e^{j\left(\frac{\pi}{8} - n\right)}$

5. 设系统差分方程为

$$y(n] = ay(n-1] + x(n]$$

其中 $x(n]$ 为输入, $y(n]$ 为输出。当边界条件选为

- (1) $y(0) = 0$
- (2) $y(-1) = 0$ 时

试判断系统是否是线性的? 是否是移不变的?

6. 试判断

- (1) $y(n] = \sum_{m=-\infty}^n x(m]$
- (2) $y(n] = [x(n)]^2$
- (3) $y(n] = x(n] \sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{7}\right)$

是否是线性系统? 并判断(2), (3)是否是移不变系统?

7. 试判断以下每一系统是否是(1)线性, (2)移不变, (3)因果, (4)稳定的?

- (1) $T[x(n)] = g(n)x(n]$
- (2) $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^n x(k]$
- (3) $T[x(n)] = x(n-n_0]$
- (4) $T[x(n)] = e^{x(n)}$

8. 以下序列是系统的单位抽样响应 $h(n]$, 试说明系统是否是(1)因果的, (2)稳定的。

- (1) $\frac{1}{n^2} u(n]$
- (2) $\frac{1}{n!} u(n]$
- (3) $3^n u(n]$
- (4) $3^n u(-n]$
- (5) $0.3^n u(n]$
- (6) $0.3^n u(-n-1]$
- (7) $\delta(n+4]$

9. 列出如图 P1-9 系统的差分方程, 并按初始条件 $y(n) = 0, n < 0$

求输入为 $x(n) = u(n]$ 时的输出序列 $y(n]$, 并画图。

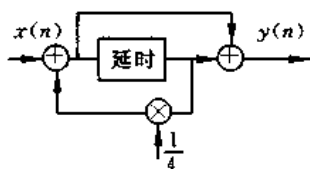


图 P1-9

10. 设有一系统, 其输入输出关系由以下差分方程确定

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果性的。

(a) 求该系统的单位抽样响应；

(b) 由(a)的结果,利用卷积和求输入 $x(n) = e^{j\pi n}$ 的响应。

11. 有一理想抽样系统,抽样频率为 $\Omega_s = 6\pi$,抽样后经理想低通滤波器 $H_s(j\Omega)$ 还原,其中

$$H_s(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$$

今有两个输入 $x_{a_1}(t) = \cos 2\pi t$, $x_{a_2}(t) = \cos 5\pi t$ 。问输出信号 $y_{a_1}(t)$, $y_{a_2}(t)$ 有无失真? 为什么?

12. 已知一个线性时不变系统的单位抽样响应 $h(n)$ 除区间 $N_0 \leq n \leq N_1$ 之外皆为零;又已知输入 $x(n)$ 除区间 $N_2 \leq n \leq N_3$ 之外皆为零;设输出 $y(n)$ 除区间 $N_4 \leq n \leq N_5$ 之外皆为零,试以 N_0, N_1, N_2 和 N_3 表示 N_4 和 N_5 。

13. 一个具有下列有限长单位抽样响应 $h(n)$ 的系统 $h(n) = 0, n < 0, n \geq N (N > 0)$, 请证明如果 $|x(n)| \leq B$, 则输出的界值为 $|y(n)| \leq B \sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|$, 同时请证明 $|y(n)|$ 可能达到这个界值, 即寻找一个满足 $|x(n)| \leq B$ 的序列 $x(n)$, 使 $y(n)$ 对某些 n 值有

$$|y(n)| = B \sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|$$

14. 有一调幅信号

$$x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 100t)] \cos(2\pi \times 600t)$$

用 DFT 做频谱分析,要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量,问

(1) 抽样频率应为多少赫兹(Hz)?

(2) 抽样时间间隔应为多少秒(sec)?

(3) 抽样点数应为多少点?

(4) 若用 $f_s = 3\text{kHz}$ 频率抽样,抽样数据为 512 点,做频谱分析,求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 512 点,并粗略画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$, 标出主要点的坐标值。

第二章 z 变 换

2.1 引 言

信号与系统的分析方法除时域分析方法外,还有变换域分析方法。在连续时间信号与系统中,其变换域方法就是拉普拉斯变换与傅里叶变换。在离散时间信号与系统中,变换域分析方法是 z 变换法和傅里叶变换法。 z 变换在离散时间系统中的作用就如同拉普拉斯变换在连续时间系统中的作用一样,它把描述离散系统的差分方程转化为简单的代数方程,使其求解大大简化。因此,对求解离散时间系统而言, z 变换是一个极重要的数学工具。 z 变换的概念既可以从理想抽样数据信号(或简称理想抽样信号)的拉普拉斯变换引出,也可以独立地对离散时间信号(序列)给出 z 变换定义。这里我们直接给出序列的 z 变换定义。最后再导出 z 变换和拉普拉斯变换的关系。

2.2 z 变换的定义与收敛域

一、 z 变换的定义

若序列为 $x(n)$,则幂级数

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2-1)$$

称为序列 $x(n)$ 的 z 变换,其中 z 为变量。亦可将 $x(n)$ 的 z 变换表示为

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) \quad (2-2)$$

二、 z 变换的收敛域

显然,只有当(2-1)式的幂级数收敛时, z 变换才有意义。

对任意给定序列 $x(n)$,使其 z 变换(即(2-1)式)收敛的所有 z 值的集合称为 $X(z)$ 的收敛域。

按照级数理论,(2-1)式的级数收敛的必要且充分条件是满足绝对可和的条件,即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty \quad (2-3)$$

要满足此不等式, $|z|$ 值必须在一定范围之内才行,这个范围就是收敛域,不同形式的序列其收敛域形式不同。分别讨论如下。

1. 有限长序列

这类序列是指在有限区间 $n_1 \leq n \leq n_2$ 之内序列才具有非零的有限值,在此区间外,序列值皆为零,其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n} \quad (2-4)$$

因此, $X(z)$ 是有限项级数之和, 故只要级数的每一项有界, 则级数就收敛, 即要求

$$|x(n) z^{-n}| < \infty, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

由于 $x(n)$ 有界, 故要求

$$|z^{-n}| < \infty, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

显然, 在 $0 < |z| < \infty$ 上, 都满足此条件, 也就是说收敛域至少是除 $z=0$ 及 $z=\infty$ 外的开域 $(0, \infty)$ “有限 z 平面”, 如图 2-1 所示。在 n_1, n_2 的特殊选择下, 收敛域还可进一步扩大:

$$\begin{aligned} 0 < |z| &\leq \infty & n_1 &\geq 0 \\ 0 \leq |z| &< \infty & n_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

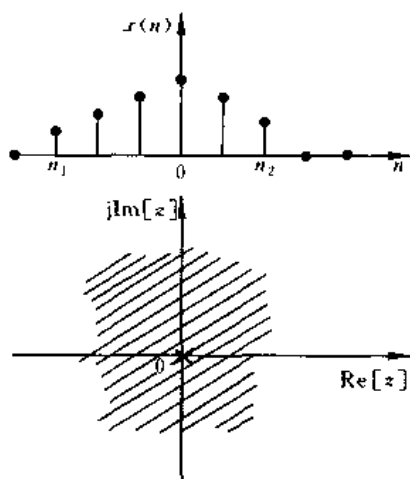


图 2-1 有限长序列及其收敛域
($n_1 < 0, n_2 > 0; z=0, z=\infty$ 除外)

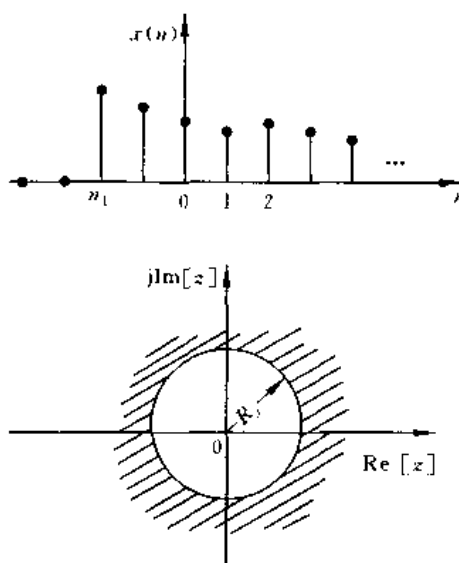


图 2-2 右边序列及其收敛域
($n_1 < 0$, 故 $z=\infty$ 除外)

2. 右边序列

这类序列是指只在 $n \geq n_1$ 时, $x(n)$ 有值, 在 $n < n_1$ 时, $x(n) = 0$, 其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2-5)$$

此式右端第一项为有限长序列的 z 变换, 按上面讨论可知, 它的收敛域为有限 z 平面, 而第二项是 z 的负幂级数, 按照级数收敛的阿贝尔 (N. Abel) 定理可推知, 存在一个收敛半径 R_{c-} , 级数在以原点为中心, 以 R_{c-} 为半径的圆外任何点都绝对收敛。因此综合此二项, 只有二项都收敛时级数才收敛。所以, 如果 R_{c-} 是收敛域的最小的半径, 则右边序列 z 变换的收敛域为

$$R_{c-} < |z| < \infty$$

右边序列及其收敛域如图 2-2 所示。

因果序列是最重要的一种右边序列, 即 $n_1 = 0$ 的右边序列, 也就是说, 在 $n \geq 0$

时 $x(n)$ 有值, $n < 0$ 时, $x(n) = 0$, 其 z 变换中只有 z 的零幂和负幂项, 因此级数收敛域可以包括 $|z| = \infty$, 即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_x < |z| \leq \infty \quad (2-6)$$

所以 $|z| = \infty$ 处 z 变换收敛是因果序列的特征。如图 2-3 所示。

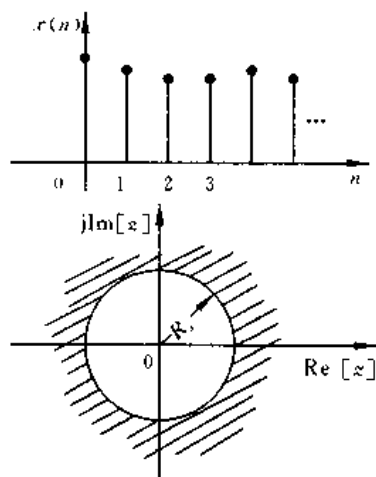


图 2-3 因果序列及其收敛域(包括 $z = \infty$)

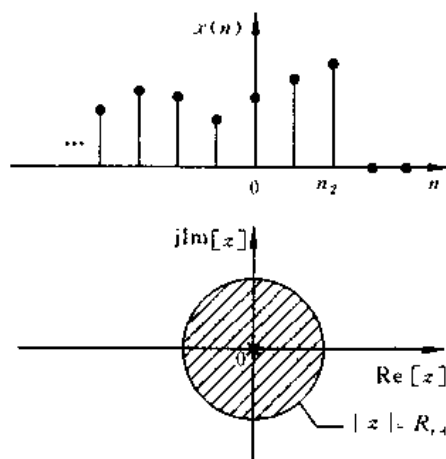


图 2-4 左边序列及其收敛域($n_2 > 0$, 故 $z = 0$ 除外)

3. 左边序列

这类序列是指只在 $n \leq n_2$ 时, $x(n)$ 有值, $n > n_2$ 时, $x(n) = 0$, 其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n} + \sum_{n=1}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad (2-7)$$

等式第二项是有限长序列的 z 变换, 收敛域为有限 z 平面, 第一项是正幂级数, 按阿贝尔定理, 必存在收敛半径 R_{x+} , 级数在以原点为中心, 以 R_{x+} 为半径的圆内任何点都绝对收敛, 如果 R_{x+} 为收敛域的最大的半径, 则综合以上两项, 左边序列 z 变换的收敛域为

$$0 < |z| < R_{x+}$$

如果 $n_2 \leq 0$, 则(2-7)式右端不存在第二项, 故收敛域应包括 $z = 0$, 即 $|z| < R_{x+}$ 。

4. 双边序列

这类序列是指 n 为任意值时(正、负、零) $x(n)$ 皆有值的序列, 可以把它看成一个右边序列和一个左边序列之和, 即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} \quad (2-8)$$

因而其收敛域应该是右边序列与左边序列收敛域的重叠部分, 等式右边第一项为右边序列, 其收敛域为 $|z| > R_{x-}$, 第二项为左边序列, 其收敛域为 $|z| < R_{x+}$, 如果满足

$$R_{x-} < R_{x+}$$

则存在公共收敛域, 即为双边序列, 收敛域为

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

这是一个环状区域。

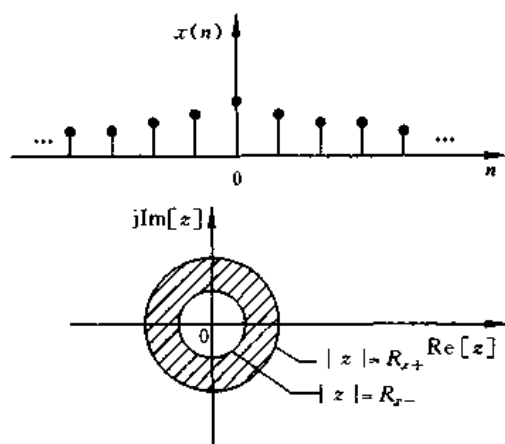


图 2-5 双边序列及其收敛域

下面举例来说明各种序列 z 变换的收敛域的求法。

[例 2-1] $x(n) = \delta(n)$, 求此序列 z 变换及收敛域。

解 这是 $n_1 = n_2 = 0$ 时有限长序列的特例, 由于

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1, \quad 0 \leq |z| \leq \infty$$

所以收敛域应是整个 z 的闭平面 ($0 \leq |z| \leq \infty$), 如图 2-6 所示。

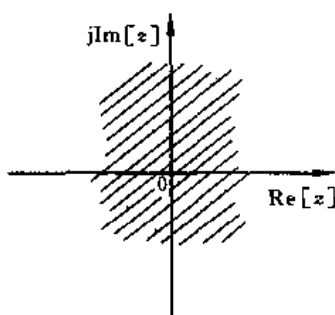


图 2-6 $\delta(n)$ 的收敛域(全部 z 平面)

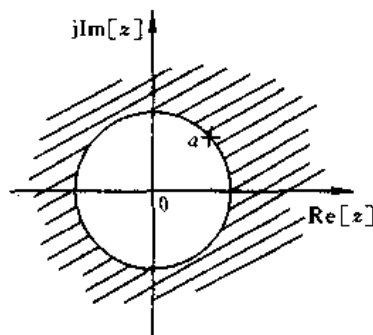


图 2-7 $x(n) = a^n u(n)$ 的收敛域

[例 2-2] $x(n) = a^n u(n)$, 求其 z 变换及收敛域。

解 这是一个右边序列, 且是因果序列, 其 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

这是一个无穷项的等比级数求和, 只有在 $|az^{-1}| < 1$ 即 $|z| > |a|$ 处收敛, 如图 2-7 所示。

故得到以上闭合形式表达式, 由于 $\frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$, 故在 $z = a$ 处为极点, 收敛域为极点所在圆 $|z| = |a|$ 的外部, 在收敛域内 $X(z)$ 为解析函数, 不能有极点, 因此, 一般来说, 右边序列的 z 变换的收敛域一定在模最大的有限极点所在圆之外。由于又是因果序列, 所以

$z=\infty$ 处也属收敛域,不能有极点。

[例 2-3] $x(n)=-b^nu(-n-1)$,求其 z 变换及收敛域

解 这是一个左边序列,其 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -b^nu(-n-1)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^nz^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n}z^n = \frac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z} \\ &= -\frac{z}{b-z} = \frac{z}{z-b} = \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| < |b| \end{aligned}$$

此无穷项等比级数的收敛域为 $|b^{-1}z| < 1$, 即 $|z| < |b|$, 如图 2-8 所示。同样,收敛域内 $X(z)$ 必须解析,因此,一般来说,左边序列的 z 变换的收敛域一定在模值最小的有限极点所在圆之内。

由以上两例看出,如果 $a=b$,则一个左边序列与一个右边序列的 z 变换表达式是完全一样的。所以,只给 z 变换的闭合表达式是不够的,是不能正确得到原序列的。必须同时给出收敛域范围,才能惟一地确定一个序列。这就说明了研究收敛域的重要性。

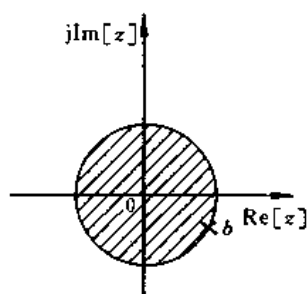


图 2-8 $x(n)=-b^nu(-n-1)$ 的收敛域

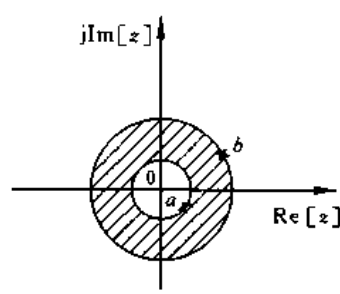


图 2-9 $x(n)=\begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ -b^n, & n < 0 \end{cases}$ 的收敛域

[例 2-4]
$$x(n)=\begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ -b^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

求其 z 变换及收敛域。

解 这是一个双边序列,其 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^nz^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^nz^{-n} \\ &= \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \\ &= \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}, \quad |a| < |z| < |b| \end{aligned}$$

由上两例的求解法,可得此例的结果。如果 $|a| < |b|$,则得上式的闭合形式表达式,也就是存在收敛域为 $|a| < |z| < |b|$,如图 2-9 所示。因此,一般来说,右边序列取其模值最大的极点 ($|z|=|a|$),而左边序列则取其模值最小的极点 ($|z|=|b|$)。

图 2-10 表示同一个 z 变换函数 $X(z)$,具有三个极点,由于收敛域不同,它可能代表

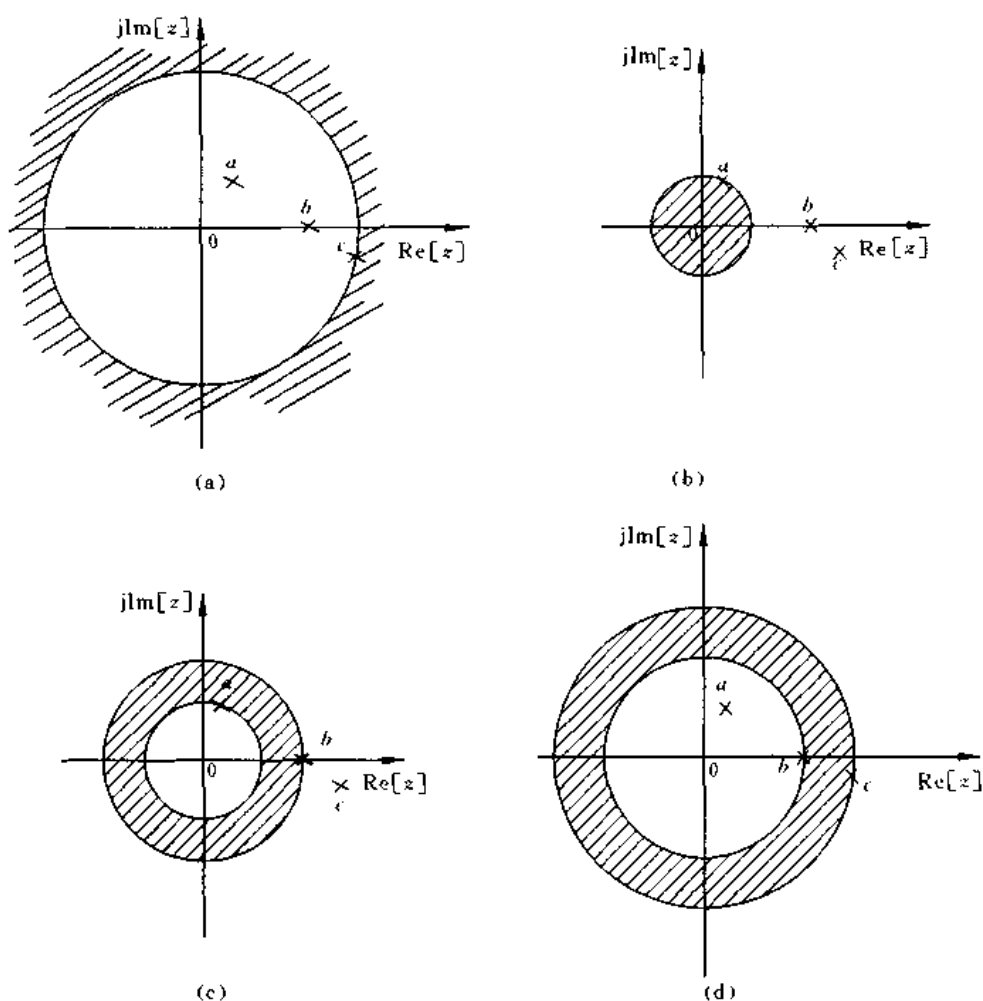


图 2-10 同一个 $X(z)$ (零极点分布相同, 但收敛域不同) 所对应的不同的序列

(a) 右边序列; (b) 左边序列; (c), (d) 两个不同的双边序列

的四个不同的序列。(a) 对应于右边序列; (b) 对应于左边序列; (c), (d) 对应于两个不同的双边序列。

2.3 z 反变换

从给定的 z 变换闭合式 $X(z)$ 中还原出原序列 $x(n)$ 称为 z 反变换, 表示为

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] \quad (2-9)$$

由(2-1)式可看出, 这实质上是求 $X(z)$ 的幂级数展开式。

求 z 反变换的方法通常有三种: 围线积分法(留数法)、部分分式展开法和长除法。

一、围线积分法(留数法)

这是求 z 反变换的一种有用的分析方法。根据复变函数理论, 若函数 $X(z)$ 在环状区

$R_{-} < |z| < R_{+}$ ($R_{-} \geq 0, R_{+} \leq \infty$) 内是解析的, 则在此区域内 $X(z)$ 可以展开成罗朗级数, 即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^{-n}, \quad R_{-} < |z| < R_{+} \quad (2-10)$$

而

$$C_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-11)$$

其中围线 c 是在 $X(z)$ 的环状解析域 (即收敛域) 内环绕原点的一条反时针方向的闭合单围线, 如图 2-11 所示。(2-10) 式与 (2-1) 式的 z 变换定义相比较可知, $x(n)$ 就是罗朗级数的系数 C_n , 故 (2-11) 式可写成

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad c \in (R_{-}, R_{+}) \quad (2-12)$$

(2-12) 式就是用围线积分的 z 反变换公式。

这一公式的正确性可以用以下的柯西积分定理来证明:

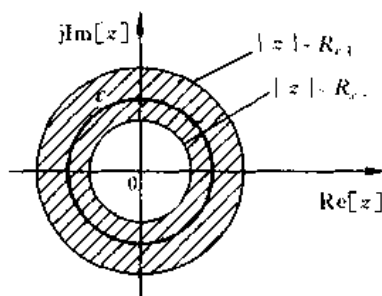


图 2-11 围线积分路径

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c R^{k-1} e^{j(k-1)\theta} d[Re^{j\theta}] = \frac{R^k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0, k \text{ 整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-13)$$

其中

$$z = Re^{j\theta}, \quad R_{-} < R < R_{+}$$

将 (2-12) 式右端写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \right] z^{n-1} dz \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{(n-m)-1} dz \end{aligned}$$

若将此式中的 $n-m$ 看成 (2-13) 式中的 k , 则有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{(n-m)-1} dz = x(n)$$

即

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = x(n), \quad c \in (R_{-}, R_{+})$$

直接计算围线积分比较麻烦, 一般都采用留数定理来求解。按留数定理, 若函数 $F(z) = X(z) z^{n-1}$ 在围线 c 上连续, 在 c 以内有 K 个极点 z_k , 而在 c 以外有 M 个极点 z_m (M, K 为有限值), 则有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_k} \quad (2-14)$$

或

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_m \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (2-15)$$

(2-15)式应用的条件是 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=\infty$ 有二阶或二阶以上零点,即要分母多项式 z 的阶次比分子多项式 z 的阶次高二阶或二阶以上。其中符号 $\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k}$ 表示函数 $F(z)=X(z)z^{n-1}$ 在点 $z=z_k$ (c 以内极点)的留数。(2-14)式说明,函数 $F(z)$ 沿围线 c 反时针方向的积分等于 $F(z)$ 在围线 c 内部各极点的留数之和;(2-15)式说明,函数 $F(z)$ 沿围线 c 顺时针方向的积分等于 $F(z)$ 在围线 c 外部各极点的留数之和。由于

$$\oint_c F(z) dz = - \oint_c F(z) dz \quad (2-16)$$

所以由(2-14)式及(2-15)式,可得

$$\sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k} = - \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (2-17)$$

将(2-14)式及(2-17)式分别代入(2-12)式,可得

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k} \quad (2-18a)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = - \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (2-18b)$$

同样,应用(2-18b)式,必须满足 $X(z)z^{n-1}$ 的分母多项式 z 的阶次比分子多项式 z 的阶次高二阶或二阶以上。

根据具体情况,既可以采用(2-18a)式,也可以采用(2-18b)式。例如,如果当 n 大于某一值时,函数 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=\infty$ 处,也就是在围线的外部可能有多重极点,这时选 c 的外部极点计算留数就比较麻烦,而通常选 c 的内部极点求留数则较简单。如果当 n 小于某值时, $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=0$ 处,也就是在围线的内部可能有多重极点,这时选用 c 外部的极点求留数就方便得多。

现在来讨论如何求 $X(z)z^{n-1}$ 在任一极点 z_r 处的留数。

设 z_r 是 $X(z)z^{n-1}$ 的单(一阶)极点,则有

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = [(z-z_r)X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} \quad (2-19)$$

如果 z_r 是 $X(z)z^{n-1}$ 的多重(l 阶)极点,则有

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} [(z-z_r)^l X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} \quad (2-20)$$

[例 2-5] 已知

$$X(z) = z^2 / [(4-z)(z-1/4)], \quad 1/4 < |z| < 4$$

求 z 反变换。

解

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^2}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} z^{n-1} dz$$

c 为 $X(z)$ 的收敛域内的闭合围线,如图 2-12 粗线所示。

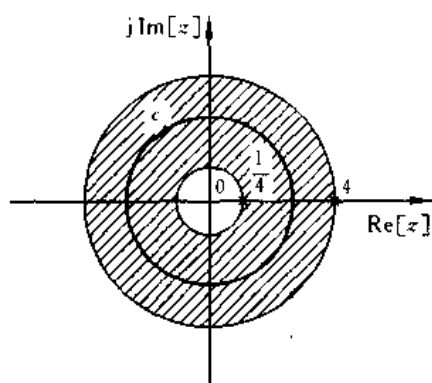


图 2-12 [例 2-5] 中 $X(z)$ 的收敛域及闭合围线

现在来看极点在围 c 内部及外部的分布情况及极点阶数, 以便确定利用(2-18a)式或(2-18b)式。当 $n \geq -1$ 时, 函数

$$z^2 z^{n-1} / [(4-z)(z-1/4)] = z^{n+1} / [(4-z)(z-1/4)]$$

在围线 c 内只有 $z=1/4$ 处的一个一阶极点, 因此采用围线 c 内部的极点求留数较方便, 利用(2-18a)式及(2-19)式可得

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \left[\left(z - \frac{1}{4} \right) \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{4^{-n}}{15}, \quad n \geq -1 \end{aligned}$$

或写成

$$x(n) = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n+1)$$

当 $n \leq -2$ 时, 函数 $\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}$ 在围线 c 的外部只有一个一阶极点 $z=4$, 且符合使用

(2-18b)式的条件($X(z)z^{n-1}$ 的分母阶次减去分子阶次结果是 ≥ 2 的)。而在围线 c 的内部则有 $z=1/4$ 处一阶极点及 $z=0$ 处 $-(n+1)$ 阶极点, 所以采用围线 c 的外部的极点较方便, 利用(2-18b)式及(2-19)式可得

$$\begin{aligned} x(n) &= -\text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=4} = - \left[(z-4) \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=4} \\ &= \frac{1}{15} \times 4^{n+2}, \quad n \leq -2 \end{aligned}$$

综合以上, 可得

$$x(n) = \begin{cases} 4^{-n}/15, & n \geq -1 \\ 4^{n+2}/15, & n \leq -2 \end{cases}$$

或写成

$$x(n) = \frac{4^{-n}}{15} u(n+1) + \frac{4^{n+2}}{15} u(-n-2)$$

[例 2-6] $X(z)$ 同[例 2-5],但收敛域不同,即

$$X(z) = z^2 / [(4-z)(z-1/4)], \quad |z| > 4$$

求 $X(z)$ 的 z 反变换。

解 同上例

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^2}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} dz$$

围线 c 是收敛域内的一条闭合围线,但收敛域不同于上例,故围线亦不同于上例,此围线可见图 2-13 粗线所示。

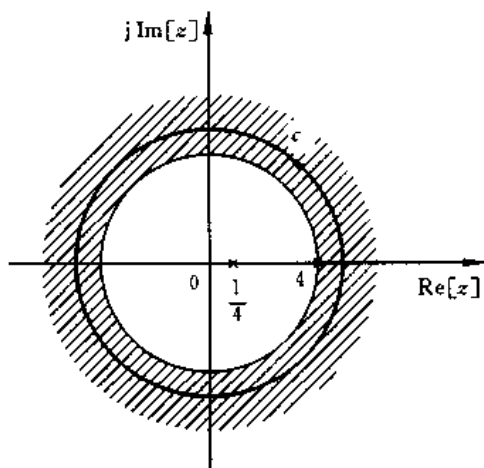


图 2-13 [例 2-6]中 $X(z)$ 的收敛域及闭合围线

当 $n \geq 0$ 时,被积函数 $z^{n+1} / [(4-z)(z-1/4)]$ 在围线内部有 $z=1/4, z=4$ 两个单极点,利用(2-18a)式及(2-19)式可得

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=4} + \text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})} \right]_{z=\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{15} [4^{-n} - 4^{n+2}], \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

由于收敛域为圆的外部,且 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = -1$, 即 $X(z)$ 在 $z = \infty$ 处不是极点,因而序列一定是因果序列,可以判断

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

当 $n < 0$ 时,利用 $z^{n+1} / [(4-z)(z-1/4)]$ 在围线 c 的外部没有极点,且分母阶次比分子阶次高 2 阶或 2 阶以上,故选 c 外部的极点求留数,其留数必为零,亦可得到 $n < 0$ 时 $x(n) = 0$ 的同样结果。最后得到

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15} (4^{-n} - 4^{n+2}), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

或写成

$$x(n) = \frac{1}{15} (4^{-n} - 4^{n+2}) u(n)$$

二、部分分式展开法

在实际应用中,一般 $X(z)$ 是 z 的有理分式,可表示成 $X(z) = B(z)/A(z)$, $A(z)$ 及 $B(z)$ 都是变量 z 的实数系数多项式,并且没有公因式,则可将 $X(z)$ 展成部分分式的形式,然后求每一个部分分式的 z 反变换(可利用表 2-1 的基本 z 变换对的公式),将各个反变换相加起来,就得到所求的 $x(n)$,即

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = X_1(z) + X_2(z) + \cdots + X_K(z) \quad (2-21)$$

表 2-1 几种序列的 z 变换

序 列	z 变 换	收敛域
1. $\delta(n)$	1	全部 z
2. $u(n)$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $u(-n-1)$	$-\frac{z}{z-1} = \frac{-1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
5. $a^n u(-n-1)$	$\frac{-z}{z-a} = \frac{-1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
6. $R_N(n)$	$\frac{z^N-1}{z^{N+1}(z-1)} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z > 0$
7. $nu(n)$	$\frac{z}{(z-a)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > 1$
8. $na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
9. $na^n u(-n-1)$	$\frac{-az}{(z-a)^2} = \frac{-az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
10. $e^{-jn\omega_0} u(n)$	$\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}} = \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}}$	$ z > 1$
11. $\sin(n\omega_0) u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} = \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
12. $\cos(n\omega_0) u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
13. $e^{-an} \sin(n\omega_0) u(n)$	$\frac{z^{-1} e^{-a} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} e^{-a} \cos \omega_0 + z^{-2} e^{-2a}}$	$ z > e^{-a}$
14. $e^{-an} \cos(n\omega_0) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} e^{-a} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} e^{-a} \cos \omega_0 + z^{-2} e^{-2a}}$	$ z > e^{-a}$
15. $\sin(\omega_0 n + \theta) u(n)$	$\frac{z^2 \sin \theta + z \sin(\omega_0 - \theta)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} = \frac{\sin \theta + z^{-1} \sin(\omega_0 - \theta)}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
16. $(n+1)a^n u(n)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2} = \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
17. $\frac{(n+1)(n+2)}{2!} a^n u(n)$	$\frac{z^3}{(z-a)^3} = \frac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$ z > a $
18. $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} a^n u(n)$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} = \frac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$ z > a $

则

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[X_1(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[X_2(z)] + \cdots + \mathcal{Z}^{-1}[X_K(z)] \quad (2-22)$$

在利用部分分式求 z 反变换时, 必须使部分分式各项的形式能够比较容易地从已知的 z 变换表中识别出来, 并且必须注意收敛域。

如果 $X(z)$ 可以表示成有理分式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (2-23)$$

则 $X(z)$ 可以展开成以下的部分分式形式

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{k=1}^{M-r} \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^r \frac{C_k}{[1 - z_k z^{-1}]^k} \quad (2-24)$$

其中 z_i 为 $X(z)$ 的一个 r 阶极点, 各个 z_k 是 $X(z)$ 的单极点 ($k=1, 2, \dots, N-r$), B_n 是 $X(z)$ 的整式部分的系数, 当 $M \geq N$ 时存在 B_n ($M=N$ 时只有 B_0 项), $M < N$ 时, 各个 $B_n = 0$ 。 B_n 可用长除法求得。

根据留数定理, 系数 A_k 可用下式求得

$$A_k = (1 - z_k z^{-1}) X(z) \big|_{z=z_k} = (z - z_k) \frac{X(z)}{z} = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_k}, \quad k = 1, 2, \dots, M-r \quad (2-25)$$

系数 C_k 可用以下关系求得

$$C_k = \frac{1}{(-z_i)^{r-k} (r-k)!} \left\{ \frac{d^{r-k}}{d(z^{-1})^{r-k}} [(1 - z_i z^{-1})^r X(z)] \right\}_{z=z_i}, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (2-26)$$

或

$$C_k = \frac{1}{(r-k)!} \left\{ \frac{d^{r-k}}{dz^{r-k}} [(z - z_i)^r \frac{X(z)}{z^k}] \right\}_{z=z_i}, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (2-27)$$

展开式诸项确定后, 再分别求右边各项 [(2-24) 式] 的 z 反变换, 以求得各个相加序列, 则原序列就是各个序列之和。

【例 2-7】 设

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}, \quad |z| > 2$$

试利用部分分式法求 z 反变换。

解 先去掉 z 的负幂次, 以便于求解, 将 $X(z)$ 等式右端分子分母同乘以 z^2 , 则得

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}, \quad |z| > 2$$

按 (2-25) 式求系数的办法, 应将此等式两端同除以 z 得

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z-0.5)}$$

将此式展成部分分式

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

利用(2-25)式求得系数为

$$A_1 = \left[(z-2) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=2} = \frac{4}{3}$$
$$A_2 = \left[(z-0.5) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0.5} = -\frac{1}{3}$$

所以

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{z-0.5}$$

因而

$$X(z) = \frac{4}{3} \times \frac{z}{z-2} - \frac{1}{3} \times \frac{z}{z-0.5}$$

查表 2-1 第 4 条可得(注意,由所给收敛域知是因果序列)

$$x(n) = \begin{cases} \frac{4}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} (0.5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

或表示为

$$x(n) = \left[\frac{4}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} (0.5)^n \right] u(n)$$

这个例子是右边序列,对于左边序列或双边序列,部分分式法同样可以应用,但必须区别哪些极点对应于右边序列,哪些极点对应于左边序列。

三、幂级数展开法(长除法)

因为 $x(n)$ 的 z 变换定义为 z^{-1} 的幂级数,即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \cdots + x(-1)z + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

所以只要在给定的收敛域内,把 $X(z)$ 展成幂级数,则级数的系数就是序列 $x(n)$ 。

一般情况下, $X(z)$ 是一个有理分式,分子分母都是 z 的多项式,则可直接用分子多项式除以分母多项式,得到幂级数展开式,从而得到 $x(n)$ 。

由于前面已说过, $X(z)$ 的闭合形式表达式加上它的收敛域,才能惟一地确定序列 $x(n)$,所以在利用长除法作 z 反变换时,同样要根据收敛域判断所要得到的 $x(n)$ 的性质,然后再展开成相应的 z 的幂级数。当 $X(z)$ 的收敛域为 $|z| > R_+$ 时,则 $x(n)$ 必为因果序列,此时应将 $X(z)$ 展成 z 的负幂级数,为此 $X(z)$ 的分子分母应按 z 的降幂(或 z^{-1} 的升幂)排列;如果收敛域是 $|z| < R_{-}$,则 $x(n)$ 必然是左边序列,此时应将 $X(z)$ 展成 z 的正幂级数,为此, $X(z)$ 的分子分母应按 z 的升幂(或 z^{-1} 的降幂)排列。

[例 2-8] 已知

$$X(z) = \frac{3z^{-1}}{(1-3z^{-1})^2}, \quad |z| > 3$$

求它的 z 反变换 $x(n)$ 。

解 收敛域 $|z| > 3$, 故是因果序列,因而 $X(z)$ 分子分母应按 z 的降幂或 z^{-1} 的升幂排列,但按 z 的降幂排列较方便,故将原式化成

$$X(z) = \frac{3z}{(z-3)^2} = \frac{3z}{z^2 - 6z + 9}, \quad |z| > 3$$

进行长除

$$\begin{array}{r}
 3z^{-1} + 18z^{-2} + 81z^{-3} + 324z^{-4} + \cdots \\
 z^2 - 6z + 9 \overline{) 3z} \\
 \underline{3z - 18 + 27z^{-1}} \\
 18 - 27z^{-1} \\
 \underline{18 - 108z^{-1} + 162z^{-1}} \\
 81z^{-1} - 162z^{-2} \\
 \underline{81z^{-1} - 486z^{-2} + 729z^{-3}} \\
 324z^{-2} - 729z^{-3} \\
 \underline{324z^{-2} - 1944z^{-3} + 2916z^{-4}} \\
 1215z^{-3} - 2916z^{-4} \\
 \vdots
 \end{array}$$

所以

$$X(z) = 3z^{-1} + 2 \times 3^2 z^{-2} + 3 \times 3^3 z^{-3} + 4 \times 3^4 z^{-4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n \times 3^n z^{-n}$$

由此得到

$$x(n) = n \times 3^n u(n-1)$$

[例 2-9] 已知

$$X(z) = \frac{z^2}{(4-z)\left(z - \frac{1}{4}\right)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 4$$

试利用长除法求 z 反变换。

解 这就是[例 2-5]中的 $X(z)$, 现在用长除法来求解 $x(n)$ 。因为给定 $X(z)$ 的收敛域为环状, 故 $x(n)$ 必是双边序列。 $X(z)$ 的一个极点 $z = \frac{1}{4}$ 对应于右边的因果序列, 而另一极点 $z = 4$ 则对应于左边序列。按照(2-25)式的关系, 应将 $\frac{X(z)}{z}$ 展成部分分式

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(4-z)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{16}{15}}{4-z} + \frac{\frac{1}{15}}{z - \frac{1}{4}}$$

所以

$$X(z) = \frac{1}{15} \left[\frac{16z}{4-z} + \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right]$$

等式右边第一项对应于左边序列, 故长除时, 分子分母应按 z 的升幂排列, 而第二项对应于右边序列, 长除时, 分子分母则应按 z 的降幂排列。 $1/15$ 是公共常数, 故先不考虑, 则

$$\begin{array}{r}
4z + z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{16}z^4 + \frac{1}{64}z^5 + \cdots \\
4 - z \overline{) 16z} \\
\underline{16z - 4z^2} \phantom{+ \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{16}z^4 + \frac{1}{64}z^5 + \cdots} \\
4z^2 \phantom{+ \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{16}z^4 + \frac{1}{64}z^5 + \cdots} \\
\underline{4z^2 - z^3} \phantom{+ \frac{1}{16}z^4 + \frac{1}{64}z^5 + \cdots} \\
z^3 \phantom{+ \frac{1}{16}z^4 + \frac{1}{64}z^5 + \cdots} \\
\underline{z^3 - \frac{1}{4}z^4} \phantom{+ \frac{1}{64}z^5 + \cdots} \\
\frac{1}{4}z^4 \phantom{+ \frac{1}{64}z^5 + \cdots} \\
\underline{\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{16}z^5} \\
\frac{1}{16}z^5 \\
\underline{\frac{1}{16}z^5 - \frac{1}{64}z^6} \\
\frac{1}{64}z^6 \\
\vdots \\
1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2} + \frac{1}{64}z^{-3} + \cdots \\
z - \frac{1}{4} \overline{) z} \\
\underline{z - \frac{1}{4}} \phantom{+ \frac{1}{16}z^{-1} + \frac{1}{64}z^{-2} + \frac{1}{256}z^{-3} + \cdots} \\
\frac{1}{4} \phantom{+ \frac{1}{16}z^{-1} + \frac{1}{64}z^{-2} + \frac{1}{256}z^{-3} + \cdots} \\
\underline{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}z^{-1}} \phantom{+ \frac{1}{64}z^{-2} + \frac{1}{256}z^{-3} + \cdots} \\
\frac{1}{16}z^{-1} \phantom{+ \frac{1}{64}z^{-2} + \frac{1}{256}z^{-3} + \cdots} \\
\underline{\frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{64}z^{-2}} \phantom{+ \frac{1}{256}z^{-3} + \cdots} \\
\frac{1}{64}z^{-2} \phantom{+ \frac{1}{256}z^{-3} + \cdots} \\
\underline{\frac{1}{64}z^{-2} - \frac{1}{256}z^{-3}} \\
\frac{1}{256}z^{-3} \\
\vdots
\end{array}$$

所以

$$X(z) = \frac{1}{15} \left(\cdots + \frac{z^5}{64} + \frac{z^4}{16} + \frac{z^3}{4} + z^2 + 4z + 1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2} + \frac{1}{64}z^{-3} + \cdots \right)$$

因而

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 0 \\ \frac{1}{15} (4)^{n+2}, & n \leq -1 \end{cases}$$

可以看出这个结果和[例 2-5]中的结果实际上是一样的。

2.4 z 变换的基本性质和定理

一、线性

线性就是要满足比例性和可加性, z 变换的线性也是如此, 若

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则

$$\mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad R_- < |z| < R_+ \quad (2-28)$$

其中 a, b 为任意常数。

相加后 z 变换的收敛域一般为两个相加序列的收敛域的重叠部分, 即

$$R_- = \max(R_{x-}, R_{y-}), \quad R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

所以相加后收敛域记为

$$\max(R_{x-}, R_{y-}) = R_- < |z| < R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

如果这些线性组合中某些零点与极点互相抵消, 则收敛域可能扩大。

[例 2-10] 已知 $x(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$, 求它的 z 变换。

解 由[例 2-2]可知

$$\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

所以

$$\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n} u(n)] = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |e^{j\omega_0}| = 1$$

$$\mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n} u(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |e^{-j\omega_0}| = 1$$

利用 z 变换的线性特性可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\cos(\omega_0 n)u(n)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}u(n)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n}u(n)] + \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n}u(n)] \\ &= \frac{1}{2(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})} + \frac{1}{2(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} \\ &= \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

[例 2-11] 求序列 $x(n) = u(n) - u(n-3)$ 的 z 变换。

解 查表 2-1 可知

$$\mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

又

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[u(n-3)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n-3)z^{-n} = \sum_{n=3}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{z-1}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n)] &= X(z) = \mathcal{Z}[u(n)] - \mathcal{Z}[u(n-3)] \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-2}}{z-1} = \frac{z^2+z+1}{z^2}, \quad |z| > 0 \end{aligned}$$

可看出收敛域扩大了。实际上,由于 $x(n)$ 是 $n \geq 0$ 的有限长序列,故收敛域是除了 $|z|=0$ 外的全部 z 平面。

二、序列的移位

讨论序列移位后其 z 变换与原序列 z 变换的关系。可以有左移(超前)及右移(延迟)两种情况。

若序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则有

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m}X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2-29)$$

式中 m 为任意整数, m 为正,则为延迟, m 为负则为超前。

证 按 z 变换的定义

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^{-m}X(z)$$

从(2-29)式可看出序列移位后,收敛域是相同的,只是对单边序列在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 处可能有例外。而对于双边序列,其收敛域是环状区,已不包括 $z=0$ 和 $z=\infty$,故序列移位后, z 变换收敛域不会变化。

例如, $\mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$, 在 z 平面处处收敛,但是, $\mathcal{Z}[\delta(n-1)] = z^{-1}$, 它在 $z=0$ 处不收敛,而 $\mathcal{Z}[\delta(n+1)] = z$, 在 $z=\infty$ 处不收敛。

三、乘以指数序列(z 域尺度变换)

若序列乘以指数序列 a^n , a 是常数,也可以是复数,看其 z 变换将如何变化,即

若

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad |a| R_{x-} < |z| < |a| R_{x+} \quad (2-30)$$

证 按定义

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[a^n x(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\ &= X\left(\frac{z}{a}\right), \quad R_x < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x^*}\end{aligned}$$

如果 $X(z)$ 在 $z=z_1$ 处为极点, 则 $X(a^{-1}z)$ 将在 $a^{-1}z=z_1$, 即 $z=az_1$ 处为极点。也就是说, 如果 a 为实数, 则表示在 z 平面上的缩小或扩大, 零、极点在 z 平面沿径向移动; 如果 a 为复数, 模 $|a|=1$, 则表示在 z 平面上旋转, 即零、极点位置沿着以原点为圆心以 $|z_1|$ 为半径的圆周变化。若 a 为任意复数, 则在 z 平面上, 零极点既有幅度伸缩, 又有角度旋转。

四、序列的线性加权(z 域求导数)

若已知

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)], \quad R_x < |z| < R_{x^*}$$

则

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \cdot \frac{d}{dz} X(z), \quad R_x < |z| < R_{x^*} \quad (2-31)$$

证 由于

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

将等式两端对 z 取导数, 得

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

交换求和与求导的次序, 则得

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz} (z^{-n}) = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) z^{-n} = -z^{-1} \mathcal{Z}[nx(n)]$$

所以

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_x < |z| < R_{x^*}$$

因而序列的线性加权(乘 n)等效于其 z 变换取导数再乘以 $(-z)$, 同样可得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[n^2 x(n)] &= \mathcal{Z}[n \cdot nx(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} X(z) \right] \\ &= z^2 \frac{d^2}{dz^2} X(z) + z \frac{d}{dz} X(z)\end{aligned}$$

如此递推可得

$$\mathcal{Z}[n^m x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$$

其中符号 $\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m$ 表示

$$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m = -z \frac{d}{dz} \left\{ -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} \cdots \left(-z \frac{d}{dz} X(z)\right) \right] \cdots \right\}$$

为 m 阶导数。

五、共轭序列

一个复序列 $x(n)$ 的共轭序列为 $x^*(n)$,

若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则

$$\mathcal{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2-32)$$

证 按定义

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^* = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right]^* \\ &= X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \end{aligned}$$

六、翻褶序列

若

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}} \quad (2-33)$$

证 按定义

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (z^{-1})^{-n} \\ &= X\left(\frac{1}{z}\right), \quad R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+} \end{aligned}$$

由于变量成倒数关系, 则极点亦成倒数关系, 从而也可得到以上的收敛域关系。

七、初值定理

对于因果序列 $x(n]$, 即 $x(n)=0, n<0$, 有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) \quad (2-34)$$

证 由于 $x(n)$ 是因果序列, 则有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

故

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

八、终值定理

设 $x(n)$ 为因果序列, 且 $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$ 的极点处于单位圆 $|z|=1$ 以内 (单位圆上最多在 $z=1$ 处可有一阶极点), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (2-35)$$

证 利用序列的移位性质可得

$$\mathcal{Z}[x(n+1) - x(n)] = (z-1)X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n}$$

再利用 $x(n)$ 为因果序列可得

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-1}^n [x(m+1) - x(m)]z^{-m}$$

由于已假设 $x(n)$ 为因果序列, 且 $X(z)$ 极点在单位圆内最多只在 $z=1$ 处可能有一阶极点, 故在 $(z-1)X(z)$ 中乘因子 $(z-1)$ 将抵消 $z=1$ 处可能的极点, 故 $(z-1)X(z)$ 在 $1 \leq |z| \leq \infty$ 上都收敛, 所以可以取 $z \rightarrow 1$ 的极限

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-1}^n [x(m+1) - x(m)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ [x(0) - 0] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \cdots \\ &\quad + [x(n+1) - x(n)] \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \end{aligned}$$

由于等式最左端即为 $X(z)$ 在 $z=1$ 处的留数, 即

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \text{Res}[X(z)]_{z=1}$$

所以也可将(2-35)式写成

$$x(\infty) = \text{Res}[X(z)]_{z=1}$$

九、有限项累加特性

设 $x(n)$ 为因果序列, 即 $x(n)=0, n < 0$,

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)], \quad |z| > R_x$$

则

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] = \frac{z}{z-1} X(z), \quad |z| > \max[R_x, 1] \quad (2-36)$$

证 令 $y(n) = \sum_{m=0}^n [x(m)]$, 则

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] z^{-n}$$

由于是因果序列的累加, 故有 $n \geq 0$, 由图 2-14 可知此求和范围为阴影区, 改变求和次序, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] &= \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \sum_{n=m}^{\infty} z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z}{z-1} X(z), \quad |z| > \max[R_x, 1] \end{aligned}$$

由于第一次求和 $\sum_{n=m}^{\infty} z^{-n}$ 的收敛域为 $|z^{-1}| < 1$, 即 $|z| > 1$, 而 $\sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m}$ 的收敛域为 $|z| > R_x$, 故收敛域为 $|z| > 1$ 及 $|z| > R_x$ 的重叠部分 $|z| > \max[R_x, 1]$ 。

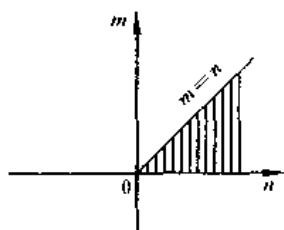


图 2-14 m, n 关系及求和范围

十、序列的卷积和(时域卷积和定理)

设 $y(n)$ 为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积和

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)], \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

则

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)] = H(z)X(z), \quad \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}] \quad (2-37)$$

若时域为卷积和, 则 z 变换域是相乘, 如上所示, 乘积的收敛域是 $X(z)$ 收敛域和 $H(z)$ 收敛域的重叠部分。如果收敛域边界上一个 z 变换的零点与另一个 z 变换的极点可互相抵消, 则收敛域还可扩大。

$$\text{证 } \mathcal{Z}[x(n) * h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * h(n)]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m)z^{-n} \right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}H(z)$$

$$= H(z)X(z), \quad \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}]$$

在线性移不变系统中, 如果输入为 $x(n)$, 系统冲激响应为 $h(n)$, 则输出 $y(n)$ 是 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积和, 这是我们前面讨论过的, 利用卷积和定理, 我们可以通过求 $X(z)H(z)$ 的 z 反变换而求出 $y(n)$, 后面我们会看到, 对于有限长序列, 这样求解会更方便些, 因而这个定理是很重要的。

[例 2-12] 设 $x(n] = a^n u(n)$

$$h(n) = b^n u(n) - ab^{n-1} u(n-1)$$

求 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \frac{z}{z-b} - \frac{a}{z-b} = \frac{z-a}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

所以

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-b}, \quad |z| > b$$

其 z 反变换为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = b^n u(n)$$

显然, 在 $z=a$ 处, $X(z)$ 的极点被 $H(z)$ 的零点所抵消, 如果 $|b| < |a|$, 则 $Y(z)$ 的收敛域比 $X(z)$ 与 $H(z)$ 收敛域的重叠部分要大, 如图 2-15 所示。

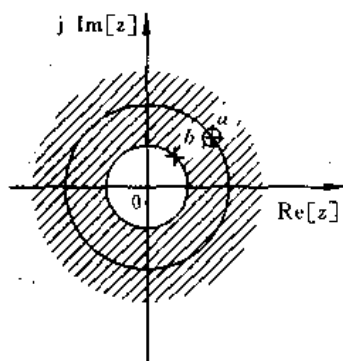


图 2-15 $a^n u(n) * [b^n u(n) - ab^n u(n-1)]$ 的 z 变换的收敛域, $|b| < |a|$ 故收敛域扩大了 ($z=a$ 处零点与极点相抵消)

十一、序列相乘 (z 域复卷积定理)

若

$$y(n) = x(n) \cdot h(n)$$

且

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)], \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

则

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}[x(n)h(n)]$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv \quad R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+} \quad (2-38)$$

其中 C 是哑变量 v 平面上, $X\left(\frac{z}{v}\right)$ 与 $H(v)$ 的公共收敛域内环绕原点的一条反时针旋转的单封闭围线, 满足

$$R_{h-} < |v| < R_{h+}$$

$$R_{x-} < \left| \frac{z}{v} \right| < R_{x+}, \quad \left[\text{即 } \frac{|z|}{R_{x+}} < |v| < \frac{|z|}{R_{x-}} \right] \quad (2-39)$$

将此两不等式相乘即得

$$R_{x-} \cdot R_{h-} < |z| < R_{x+} \cdot R_{h+} \quad (2-40)$$

v 平面收敛域为

$$\max\left[R_{h-}, \frac{|z|}{R_{x+}}\right] < |v| < \min\left[R_{h+}, \frac{|z|}{R_{x-}}\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad Y(z) &= \mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}[x(n)y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_c H(v)v^{n-1} dv \right] z^{-n} \\
&= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\oint_c H(v)v^n \frac{dv}{v} \right] z^{-n} \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[H(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right] \frac{dv}{v} \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(v) X\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv, \quad R_{x-} \cdot R_{h-} < |z| < R_{x+} \cdot R_{h+}
\end{aligned}$$

由推导过程看出 $H(v)$ 的收敛域就是 $H(z)$ 的收敛域, $X\left(\frac{z}{v}\right)$ 的收敛域 $\left(\frac{z}{v}\right)$ 的区域就是 $X(z)$ 的收敛域 (z 的区域), 即 (2-39) 式成立, 从而 (2-40) 式成立。收敛域亦得到证明。

不难证明, 由于乘积 $x(n)h(n)$ 的先后次序可以互调, 故 X, H 的位置可以互换, 故下式同样成立

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \mathcal{Z}[x(n)h(n)] \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv, \quad R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+} \quad (2-41)
\end{aligned}$$

而此时围线 c 所在收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{h+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{h-}}\right] \quad (2-42)$$

复卷积公式可用留数定理求解, 但关键在于正确决定围线所在收敛域。

(2-38) 式及 (2-41) 式类似于卷积积分, 为了说明这一点, 我们令围线是一个以原点为圆心的圆, 即令

$$v = \rho e^{j\theta}, \quad z = re^{j\omega}$$

则 (2-38) 式变为

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(\rho e^{j\theta}) X\left(\frac{r}{\rho} e^{j(\omega-\theta)}\right) \frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}} \quad (2-43)$$

由于 c 是圆, 故 θ 的积分限为 $-\pi$ 到 π , 所以上式变为

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\rho e^{j\theta}) X\left(\frac{r}{\rho} e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta \quad (2-44)$$

这可看成为卷积积分, 积分是在 $-\pi$ 到 π 的一个周期上进行, 称为它周期卷积, 在第七章中将要用到它。

[例 2-13] 设 $x(n) = a^n u(n)$, $h(n) = b^{n-1} u(n-1)$, 求 $Y(z) = \mathcal{Z}[x(n)h(n)]$

$$\text{解} \quad X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \mathcal{Z}[b^{n-1} u(n-1)] = \frac{1}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

利用复卷积公式 (2-41)

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \mathcal{Z}[x(n)h(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{v}{(v-a)} \cdot \frac{1}{\frac{z}{v}-b} \cdot \frac{1}{v} dv \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{v}{(v-a)(z-bv)} dv, \quad |z| > |ab|
 \end{aligned}$$

收敛域为 $|v| > |a|$ [对 $X(v)$] 与 $\left|\frac{z}{v}\right| > |b|$ [对 $H\left(\frac{z}{v}\right)$] 的重叠区, 即 $|a| < |v| < \left|\frac{z}{b}\right|$, 所以围线只包围一个极点 $v=a$, 如图 2-16 所示。

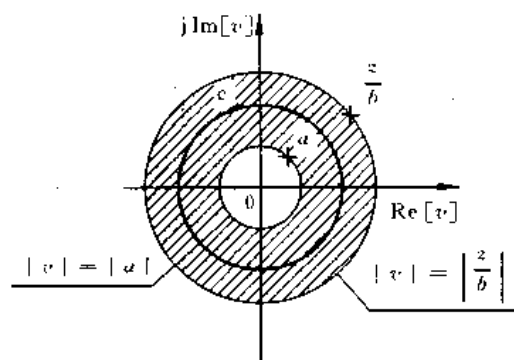


图 2-16 v 平面收敛域

利用留数定理可求得

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{v}{(v-a)(z-bv)} dv = \text{Res}\left[\frac{v}{(v-a)(z-bv)}\right]_{v=a} \\
 &= \frac{a}{z-ab}, \quad |z| > |ab|
 \end{aligned}$$

其中: 收敛域是按(2-40)式得出的。

十二、帕塞瓦定理

利用复卷积定理可以得到重要的帕塞瓦定理。若

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)], \quad R_h < |z| < R_{h+}$$

且

$$R_{x-} R_{h-} < 1 < R_{x+} R_{h+} \quad (2-45)$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv \quad (2-46)$$

“*”表示取复共轭, 积分闭合围线 c 应在 $X(v)$ 和 $H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)$ 的公共收敛域内, 即

$$\max\left[R_{x-}, \frac{1}{R_{h+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{1}{R_{h-}}\right]$$

证, 令

$$y(n) = x(n)h^*(n)$$

由于

$$\mathcal{Z}[h^*(n)] = H^*(z^*)$$

利用复卷积公式可得

$$\begin{aligned} Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n)z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(v)H^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right)v^{-1}dv, \quad R_{x-}R_{h-} < |z| < R_{x+}R_{h+} \end{aligned}$$

由于(2-45)式的假设成立,故 $|z|=1$ 在 $Y(z)$ 的收敛域内,也就是 $Y(z)$ 在单位圆上收敛,则有

$$Y(z)|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

如果 $h(n)$ 是实序列,则两边取共轭(*)号可取消。如果 $X(z)$, $H(z)$ 在单位圆上都收敛,则 c 可取为单位圆,即

$$v = e^{j\omega}$$

则(2-46)式可变为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega \quad (2-47)$$

如果 $h(n)=x(n)$,则进一步有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2-48)$$

(2-47)式、(2-48)式是序列及其傅里叶变换的帕塞瓦公式,后者说明时域中求序列的能量与频域中用频谱 $X(e^{j\omega})$ 来计算序列的能量是一致的。

z 变换的主要性质见表2-2所示。

表 2-2 z 变换的主要性质

序号	序 列	z 变 换	收 敛 域
1	$x(n)$ $h(n)$	$X(z)$ $H(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$ $R_{h-} < z < R_{h+}$
2	$ax(n) + bh(n)$	$aX(z) + bH(z)$	$\max[R_{x-}, R_{h-}] < z < \min[R_{x+}, R_{h+}]$
3	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
4	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a R_{x-} < z < a R_{x+}$
5	$n^m x(n)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
6	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
7	$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_{x+}} < z < \frac{1}{R_{x-}}$
8	$x^*(-n)$	$X^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$	$\frac{1}{R_{x+}} < z < \frac{1}{R_{x-}}$
9	$\text{Re}[x(n)]$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
10	$j\text{Im}[x(n)]$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	$R_{x-} < z < R_{x+}$

续表

序号	序 列	z 变 换	收 敛 域
11	$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)$	$\frac{z}{z-1}X(z)$	$ z > \max[R_{x-}, 1], x(n)$ 因果序列
12	$x(n) * h(n)$	$X(z)H(z)$	$\max[R_{x-}, R_{h-}] < z < \min[R_{x+}, R_{h+}]$
13	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_{x-}R_{h-} < z < R_{x+}R_{h+}$
14	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		$x(n)$ 为因果序列, $ z > R_{x-}$
15	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$		$x(n)$ 为因果序列, $X(z)$ 的极点落于单位圆内部, 最多在 $z=1$ 处有一阶极点。
16	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$		$R_{x-}R_{h-} < 1 < R_{x+}R_{h+}$

2.5 序列的 z 变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

在第一章 1.4 节中已经讨论了连续信号的理想抽样, 在这一节中, 我们利用它来讨论离散信号的 z 变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系。

我们来看序列的 z 变换与理想抽样信号的拉普拉斯变换的关系。

设连续信号为 $x_a(t)$, 理想抽样后的抽样信号为 $\hat{x}_a(t)$, 它们的拉普拉斯变换分别为

$$X_a(s) = \mathcal{L}[x_a(t)]$$

$$\hat{X}_a(s) = \mathcal{L}[\hat{x}_a(t)]$$

则

$$\hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt$$

将(1-34)式的 $\hat{x}_a(t)$ 表达式代入可得

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-nsT} \end{aligned} \quad (2-49)$$

抽样序列 $x(n) = x_a(nT)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

由此看出, 当 $z = e^{sT}$ 时, 抽样序列的 z 变换就等于其理想抽样信号的拉普拉斯变换。

$$X(z) \big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s) \quad (2-50)$$

这两变换之间的关系, 就是由复变量 s 平面到复变量 z 平面的映射, 其映射关系为

$$z = e^{sT}, \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (2-51)$$

现在来讨论这一映射关系。将 s 平面用直角坐标表示

$$s = \sigma + j\Omega$$

而 z 平面用极坐标表示

$$z = re^{j\omega}$$

将它们都代入(2-51)式中,得到

$$re^{j\omega} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

因而

$$r = e^{\sigma T}, \quad \omega = \Omega T$$

也就是说 z 的模 r 只与 s 的实部 σ 相对应,而 z 的相角 ω 只与 s 的虚部 Ω 相对应。

1. r 与 σ 的关系, $r = e^{\sigma T}$

$\sigma = 0$ (s 平面虚轴) 对应于 $r = 1$ (z 平面单位圆上);

$\sigma < 0$ (s 的左半平面) 对应于 $r < 1$ (z 平面单位圆内部);

$\sigma > 0$ (s 的右半平面) 对应于 $r > 1$ (z 平面单位圆外部); 其映射关系可见图 2-17。

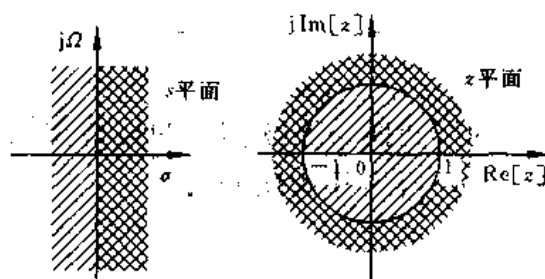


图 2-17 $\sigma \leq 0$ 分别映射成 $r \geq 1$

2. ω 与 Ω 的关系, $\omega = \Omega T$

$\Omega = 0$ (s 平面实轴) 对应于 $\omega = 0$ (z 平面正实轴)

$\Omega = \Omega_0$ (常数) (s 平面平行于实轴的直线) 对应于 $\omega = \Omega_0 T$ (z 平面始于原点辐角为 $\omega = \Omega_0 T$ 的辐射线)。

Ω 由 $-\pi/T$ 增长到 π/T , 对应于 ω 由 $-\pi$ 增长到 π , 即 s 平面为 $2\pi/T$ 的一个水平条带相当于 z 平面辐角转了一周, 也就是覆盖了整个 z 平面 ($\Omega = \pm\pi/T$ 映射到 z 平面 $\omega = \pm\pi$, 即负实轴), 因此 Ω 每增加一个抽样角频率 $\Omega_s = 2\pi/T$, 则 ω 相应的增加一个 2π , 也就是说, 是 ω 的周期函数。如图 2-18 所示。

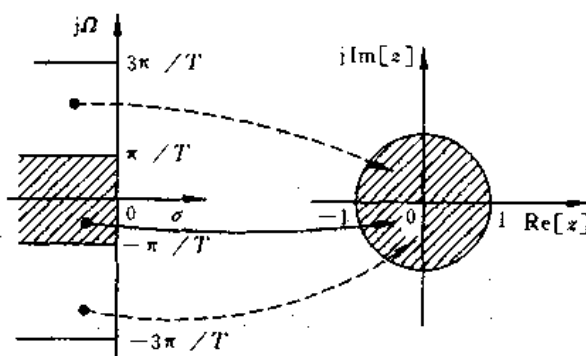


图 2-18 s 平面与 z 平面的多值映射关系

(以 s 平面左半平面为例, s 右半平面则以相同方式映射到 z 平面单位圆外)

所以 s 平面到 z 平面的映射是多值映射。

(1) 首先,通过 $s \rightarrow z$ 的映射关系为纽带,去找抽样序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 和连续信号 $x_a(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_a(s)$ 的关系。由(1-39)式时域抽样,则在 s 域为沿 $j\Omega$ 轴(s 平面的虚轴)的周期延拓,重写如下

$$X_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) \quad (2-52)$$

将此式代入到(2-50)式中,可得 $X(z)$ 与 $X_a(s)$ 的关系

$$X(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (2-53)$$

(2) 其次,我们来讨论 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 和 $x_a(t)$ 的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 的关系。

我们知道,傅里叶变换是拉普拉斯变换在虚轴的特例,即 $s=j\Omega$,因而映射到 z 平面上为单位圆 $z=e^{j\Omega T}$,将这两关系代入到(2-50)式可得

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega) \quad (2-54)$$

就是说,抽样序列在单位圆上的 z 变换,就等于其理想抽样信号的傅里叶变换。

同样,将 $s=j\Omega$ 及 $z=e^{j\Omega T}$ 代入到(2-53)式可得

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (2-55)$$

前面已知(见(1-40)式)频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓,这一点表现在 z 平面的单位圆上就是 $X(e^{j\Omega T})$ 是 Ω 的周期函数,即它在单位圆上循环出现。

在以后的讨论中,我们用数字频率 ω 来作为 z 平面上单位圆的参数,即

$$z = e^{j\omega} \quad (2-56)$$

数字频率 ω 表示 z 平面的辐角,它和模拟角频率 Ω 的关系为

$$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s} \quad (2-57)$$

同样,可看出数字频率是模拟角频率对抽样频率的归一化值,或是模拟频率对抽样频率的相对比值乘以 2π 。

将(2-57)式代入(2-55)式可得

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right) \quad (2-58)$$

单位圆上的 z 变换是和信号的频谱相联系的,因而常称单位圆上序列的 z 变换为序列的傅里叶变换。故可得以下定义。

2.6 序列的傅里叶变换

一个离散时间非周期信号及其频谱之间的关系,可用序列的傅里叶变换来表示

$$\text{正变换} \quad \text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2-59)$$

$$\text{反变换} \quad \text{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2-60)$$

当然(2-60)式等式右端的积分区间可以是 $(0, 2\pi)$ 或其他任何一个周期

(2-59)式级数的收敛条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

也就是说,若序列 $x(n)$ 绝对可和,则它的傅里叶变换一定存在且连续,反过来说,序列的傅里叶变换存在且连续,则序列一定是绝对可和的。由于在时域上的 $x(n)$ 是离散的,故频域上的 $X(e^{j\omega})$ 一定是 ω 的周期函数,(2-59)式正是周期函数 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数展开式,而 $x(n)$ 则是傅里叶级数的系数,由(2-60)式确定。

上一节已经说到了序列的傅里叶变换就是序列的 z 变换在单位圆上的值(当序列的 z 变换在单位圆上收敛时),因而可表示成

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2-61)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad (2-62)$$

故序列的傅里叶变换的一切特性,皆可由 z 变换得到,我们把它列在表 2-3 中,供大家参考。但是表中的性质 12 到性质 17 是傅里叶变换的一些对称性质,这些性质对于简化运算与求解很有帮助,在离散傅里叶变换(DFT)一章中将这此对称性加以扩展,对 DFT 的计算可起很大作用,因而在下一节中着重加以讨论。

表 2-3 序列傅里叶变换的主要性质

序号	序 列	傅里叶变换
1	$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
2	$h(n)$	$H(e^{j\omega})$
3	$ax(n) + bh(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bH(e^{j\omega})$
4	$x(n-m)$	$e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$
5	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{1}{a}e^{j\omega}\right)$
6	$n^{j\omega_0} x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
7	$x(n) * h(n)$	$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
8	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
9	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
10	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
11	$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
12	$\text{Re}[x(n)]$	$X_r(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})}{2}$
13	$j\text{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})}{2}$
14	$x_r(n) = \frac{x(n) + x^*(-n)}{2}$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
15	$x_o(n) = \frac{x(n) - x^*(-n)}{2}$	$j\text{Im}[X(e^{j\omega})]$

序号	序 列	傅里叶变换
16	$x(n)$ 为实序列	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = -\operatorname{Im}[X(e^{-j\omega})] \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \end{cases}$
17	$x_e(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$ [$x(n)$ 实序列]	$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})]$
18	$x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$ [$x(n)$ 实序列]	$j\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$
19	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$ (帕塞瓦公式)	
20	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$ (帕塞瓦公式)	

2.7 傅里叶变换的一些对称性质

共轭对称序列定义为满足

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (2-63)$$

的序列 $x_e(n)$ 。对于实序列来说,这一条件变成 $x_e(n) = x_e(-n)$,即 $x_e(n)$ 为偶对称序列。

共轭反对称序列定义为满足

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (2-64)$$

的序列 $x_o(n)$ 。对于实序列来说,这一条件变成 $x_o(n) = -x_o(-n)$,即 $x_o(n)$ 为奇对称序列。

任一序列 $x(n)$ 总能表示成一个共轭对称序列与一个共轭反对称序列之和(对于实序列,就是偶对称序列与奇对称序列之和):

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2-65)$$

要证明这一点,需找到 $x_e(n)$ 及 $x_o(n)$,这只要令 $x_e(n)$ 及 $x_o(n)$ 满足以下等式即可:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \quad (2-66a)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \quad (2-66b)$$

很容易看出,这样得到的 $x_e(n)$ 及 $x_o(n)$ 分别满足共轭对称定义的(2-63)式和共轭反对称定义的(2-64)式。

同样,一个序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也可分解成共轭对称分量与共轭反对称分量之和:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (2-67)$$

其中

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (2-68a)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (2-68b)$$

$X_r(e^{j\omega})$ 是共轭对称的,满足 $X_r(e^{j\omega}) = X_r^*(e^{-j\omega})$, $X_o(e^{j\omega})$ 是共轭反对称的,满足 $X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$ 。与序列情况一样,若傅里叶变换函数 $X(e^{j\omega})$ 是实函数,且满足共轭对称,则称之为频率的偶函数,即 $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ 。若 $X(e^{j\omega})$ 是实函数,且满足共轭反对称,则称之为频率的奇函数 $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$ 。

由以上定义可以说明表 2-3 一些对称性质(性质 12 到性质 16,这些性质可以直接由 z 变换中代入 $z=e^{j\omega}$ 而得到证明,亦可由傅里叶变换的定义及以上性质而得到证明)。

性质 12 说明序列实部的傅里叶变换等于序列傅里叶变换的共轭对称分量,即

$$\text{DTFT}\{\text{Re}[x(n)]\} = X_r(e^{j\omega}) \quad (2-69)$$

性质 13 说明序列虚部乘 j 后的傅里叶变换等于序列傅里叶变换的共轭反对称分量,即

$$\text{DTFT}\{j\text{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

性质 14、性质 15 则反过来说明序列的共轭对称和共轭反对称分量的傅里叶变换分别等于序列傅里叶变换的实部和 j 乘虚部,即

$$\text{DTFT}[x_r(n)] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] \quad (2-70a)$$

$$\text{DTFT}[x_o(n)] = j\text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (2-70b)$$

重要的性质是当 $x(n)$ 为实序列时的情况。

性质 16 说明,如果 $x(n)$ 是实序列,则其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 满足共轭对称性,即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2-71)$$

由此得出

$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \quad (2-72a)$$

$$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \quad (2-72b)$$

所以,实序列的傅里叶变换的实部是 ω 的偶函数,而虚部是 ω 的奇函数。

同样,如果表示成极坐标形式,则

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \exp\{j\arg X(e^{j\omega})\}$$

$$= \sqrt{\{\text{Re}[X(e^{j\omega})]\}^2 + \{\text{Im}[X(e^{j\omega})]\}^2} \exp\left\{j\arctan\left[\frac{\text{Im}[X(e^{j\omega})]}{\text{Re}[X(e^{j\omega})]}\right]\right\}$$

所以,对实序列 $x(n)$ 来说,必有

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad \text{—— 幅度是 } \omega \text{ 的偶函数} \quad (2-73a)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \quad \text{—— 幅角是 } \omega \text{ 的奇函数} \quad (2-73b)$$

性质 17、性质 18 说明实序列 $x(n)$ 的偶对称序列分量和奇对称序列分量的傅里叶变换分别为序列 $x(n)$ 的傅里叶变换的实部和 j 乘虚部,即

$$\text{DTFT}[x_r(n)] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] \quad (2-74a)$$

$$\text{DTFT}[x_o(n)] = j\text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (2-74b)$$

以上这些性质读者可以自己加以证明。

性质 19、性质 20 是帕塞瓦公式,前面(2-47)式、(2-48)式中已经引出来了。

2.8 离散系统的系统函数,系统的频率响应

在 1.2 节中说过,一个线性移不变系统在时域中可以用它的单位抽样响应 $h(n)$ 来表示,即

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对等式两端取 z 变换,得

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

则

$$H(z) = Y(z)/X(z)$$

我们把 $H(z)$ 称为线性移不变系统的系统函数,它是单位抽样响应的 z 变换,即

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (2-75)$$

在单位圆上 ($z=e^{j\omega}$) 的系统函数就是系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

一、因果稳定系统

前面第一章已说过,一个线性移不变系统稳定的必要且充分条件是 $h(n)$ 必须满足绝对可和条件,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

而 z 变换的收敛域由满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$ 的那些 z 值确定,所以,如果系统函数的收敛域包括单位圆 $|z|=1$,则系统是稳定的,反过来也对。也就是说必须 $H(e^{j\omega})$ 存在且连续。

因果系统的单位抽样响应为因果序列,前已指出因果序列的收敛域为 $R_x < |z| \leq \infty$,即因果系统的收敛域是半径为 R_x 的圆的外部,且必须包括 $z=\infty$ 在内

综上两点看出,一个因果稳定系统的系统函数 $H(z)$ 必须在从单位圆到 ∞ 的整个 z 域内收敛,即

$$1 \leq |z| \leq \infty$$

也就是说系统函数的全部极点必须在单位圆内。

二、系统函数和差分方程的关系

1.3 节中已说明,一个线性移不变系统,可以用常系数线性差分方程来描述。我们来研究系统函数 $H(z)$ 和差分方程系数的关系。这种常系数线性差分方程的一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

若系统起始状态为零,直接对上式取 z 变换,可得(利用移位特性)

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

于是

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2-76)$$

由此看出系统函数分子、分母多项式的系数分别与差分方程的系数相当。

(2-77)式是两个 z^{-1} 的多项式之比,将其分别进行因式分解,可得

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (2-77)$$

式中 $z=c_m$ 是 $H(z)$ 的零点, $z=d_k$ 是 $H(z)$ 的极点,它们都由差分方程的系数 a_k 和 b_m 决定。因此,除了比例常数 K 以外,系统函数完全由它的全部零点、极点来确定。

但是(2-77)式(或(2-78)式)并没有给定 $H(z)$ 的收敛域,因而可代表不同的系统,这和前面我们说过的,差分方程并不惟一地确定一个线性系统的单位抽样响应是一致的,同一系统函数,收敛域不同,所代表的系统就不同,所以必须同时给定系统的收敛域才行。而对于稳定系统,其收敛域必须包括单位圆,因而,在 z 平面上以极点、零点图描述系统函数,通常都画出单位圆以便看出极点是在单位圆内还是位于单位圆之外。

三、系统的频率响应的意义

为了研究离散线性系统对输入频谱的处理作用,因而有必要研究线性系统对复指数或正弦的稳态响应,这就是系统的频域表示法。

设输入序列是频率为 ω 的复指数序列,即

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

线性移不变系统的单位抽样响应为 $h(n)$,利用卷积和的(1-22)式,得到输出为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m}$$

可表示成

$$y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \quad (2-78)$$

其中

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (2-79)$$

将(2-79)式与(2-59)式相比较,看出 $H(e^{j\omega})$ 是 $h(n)$ 的傅里叶变换,称为系统的频率响应。它描述复指数序列通过线性移不变系统后,复振幅(包括幅度和相位)的变化(见(2-78)式)。

$h(n)$ 绝对可和,则系统稳定,这也意味着系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 存在且连续。

和连续系统时一样,当系统输入为正弦序列,则输出为同频的正弦序列,其幅度受频率响应幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 加权,而输出的相位则为输入相位与系统相位响应之和,这一结论,可证明如下:

设输入为

$$\begin{aligned} x(n) &= A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)}] \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \end{aligned}$$

根据(2-78)式, $\frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$ 的响应为

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$$

根据卷积和的(1-22)式可知, $\frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$ 的响应是

$$y_2(n) = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

线性系统, 利用叠加定理可知系统对正弦 $A \cos(\omega_0 n + \phi)$ 的输出为

$$y(n) = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}]$$

由于 $h(n)$ 是实序列, 故 $H(e^{j\omega})$ 满足共轭对称条件, 即 $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$, 也就是 $H(e^{j\omega})$ 的幅度为偶对称, $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$ 。相角为奇对称, $\arg |H(e^{j\omega})| = -\arg |H(e^{-j\omega})|$ 。所以

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} [|H(e^{j\omega_0})| e^{j\arg[H(e^{j\omega_0})]} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + |H(e^{-j\omega_0})| e^{j\arg[H(e^{-j\omega_0})]} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}] \\ &= \frac{A}{2} [|H(e^{j\omega_0})| [e^{j(\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})])} + e^{j(\omega_0 n - \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})])}]] \end{aligned}$$

即

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos\{\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})]\} \quad (2-80)$$

由于

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \quad (2-81)$$

可以得知, $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数, 周期为 2π , 这是由于 $e^{j\omega n} = e^{j(\omega + 2\pi)n}$ 代入(2-81)式, 可知 $H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega + 2\pi})$ 。同时, 虽然 $h(n)$ 是离散序列, 但 $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数。

由(2-81)式还可看出, 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 正是系统函数 $H(z)$ 在单位圆上的值, 即

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (2-82)$$

有了系统频率响应的概念, 现在, 对线性移不变系统, 我们来建立任意输入情况下, 输入与输出两者的傅里叶变换间的关系。这可直接由卷积和(1-23)式两端取傅里叶变换, 且利用表 2-3 傅里叶变换性质 7 得到

$$\text{DTFT}[y(n)] = \text{DTFT}[x(n) * h(n)]$$

即

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad (2-83)$$

其中

$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$$

$H(e^{j\omega})$ 就是(2-82)式表示的系统的频率响应。由(2-83)式得知, 对于线性移不变系统, 其

输出序列的傅里叶变换等于输入序列的傅里叶变换与系统频率响应的乘积。

和反变换(2-60)式一样,可求得输出序列为

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2-84)$$

由(2-60)式 $\left[x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right]$ 看出,序列 $x(n)$ 可表示成复指数的叠加,即微分增量 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ 的叠加,利用此一叠加特性,以及系统对复指数的响应是完全由 $H(e^{j\omega})$ 确定的这一性质,可以解释 $x(n)$ 作用于系统的输出响应(2-84)式。因为每个输入复指数为 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$,它作用在系统上,其输出响应可表示成用它乘 $H(e^{j\omega})$,即为 $\frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$,而总的输出等于系统对 $x(n)$ 的每个复指数分量的响应的叠加,即(2-84)式的积分表达式。

四、频率响应的几何确定法

可以利用 $H(z)$ 在 z 平面上零点、极点的分布,通过几何方法直观地求出系统的频率响应。(2-77)式已表示出 $H(z)$ 的因式分解,即用零点、极点表达的 $H(z)$ 为

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = K z^{(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)} \quad (2-85)$$

其中 K 为实数,用 $z=e^{j\omega}$ 代入,即得系统的频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})} = K e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \\ &= |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \end{aligned} \quad (2-86)$$

其模等于

$$|H(e^{j\omega})| = |K| \frac{\prod_{m=1}^M |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} \quad (2-87)$$

其相角为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N-M)\omega \quad (2-88)$$

在 z 平面上, $z=c_m (m=1,2,\dots,M)$ 表示 $H(z)$ 的零点(图上以 \circ 表示),而 $z=d_k (k=1,2,\dots,N)$ 表示 $H(z)$ 的极点(图上以 \times 表示)(见图 2-19),则复变量 c_m (或 d_k) 是由原点指向 c_m 点(或 d_k 点)的矢量表示,而 $e^{j\omega} - c_m$ 可以用一根由零点 c_m 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点的矢量 C_m 来表示,即

$$e^{j\omega} - c_m = C_m$$

而 $e^{j\omega} - d_k$ 则用极点 d_k 指向 $e^{j\omega}$ 点的矢量 D_k 来表示, 即

$$e^{j\omega} - d_k = D_k$$

设 C_m 矢量为 $C_m = \rho_m e^{j\theta_m}$, 其模为 ρ_m , 相角为 θ_m , D_k 矢量为 $D_k = l_k e^{j\phi_k}$, 其模为 l_k , 相角为 ϕ_k , 则频率响应的模, 即(2-87)式变成

$$|H(e^{j\omega})| = |K| \frac{\prod_{m=1}^M \rho_m}{\prod_{k=1}^N l_k} \quad (2-89)$$

也就是说, 频率响应的幅度等于各零点至 $e^{j\omega}$ 点矢量长度之积除以各极点至 $e^{j\omega}$ 点矢量长度之积, 再乘以常数 $|K|$ 。

而频率响应的相角, 即(2-88)式变成

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^M \theta_m - \sum_{k=1}^N \phi_k + (N-M)\omega \quad (2-90)$$

也就是说, 频率响应的相角等于各零点至 $e^{j\omega}$ 点矢量的相角之和减去各极点至 $e^{j\omega}$ 点矢量相角之和, 加上常数 K 的相角 $\arg[K]$, 再加上线性相移分量 $\omega(N-M)$, 后者在离散时域上, 只引入 $(N-M)$ 位的移位而已, 也就是说, 在原点 ($z=0$) 处的极点或零点至单位圆的距离大小不变, 其值为 1, 故对幅度响应不起作用。

根据(2-89)式和(2-90)式, 可求得系统的频率响应。由于单位圆附近的零点位置将对幅度响应凹谷的位置和深度有明显的影响, 零点在单位圆上, 则谷点为零, 即为传输零点。零点可在单位圆外。而在单位圆内且靠近单位圆附近的极点对幅度响应的凸峰的位置和深度则有明显的影响, 极点在单位圆外, 则不稳定。利用这种直观的几何方法, 适当地控制极点、零点的分布, 就能改变数字滤波器的频率响应特性, 达到预期的要求。

图 2-19 表示了两个极点、两个零点的频率响应的几何解释和频率响应的幅度。

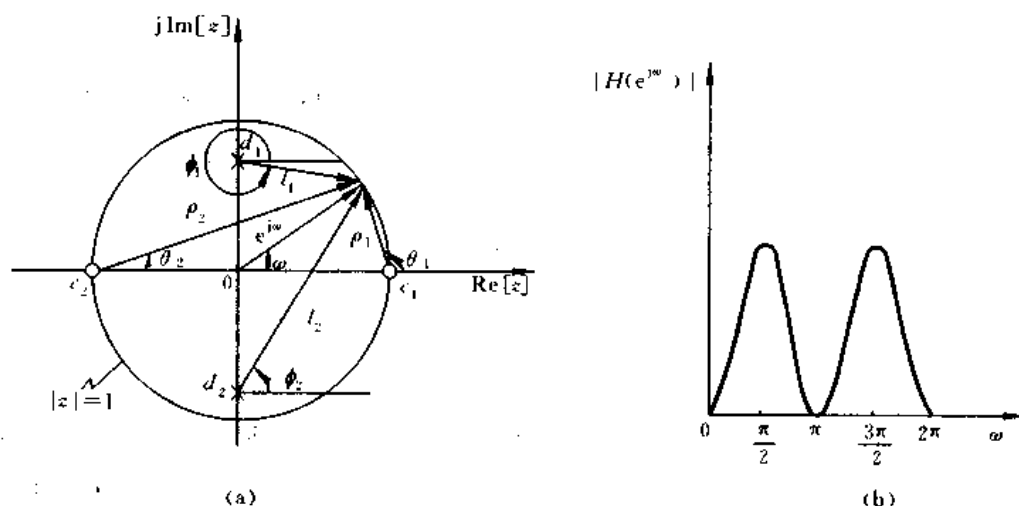


图 2-19 频率响应的几何解释

(a) 几何解释; (b) 频率响应的幅度

〔例 2-14〕 设一阶系统的差分方程为

$$y(n) = x(n) + ay(n-1), \quad |a| < 1, a \text{ 实数}$$

求系统的频率响应。

解 将差分方程等式两端取 z 变换, 可求得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

这是一个因果系统, 可求出单位抽样响应为

$$h(n) = a^n u(n)$$

该一阶系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + j\sin\omega}$$

幅度响应为

$$|H(e^{j\omega})| = (1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{-1/2}$$

相位响应为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right)$$

$h(n)$, $|H(e^{j\omega})|$, $\arg[H(e^{j\omega})]$ 画在图 2-20 中。若要系统稳定, 要求极点在单位圆内, 即要求实数 a 满足 $|a| < 1$, 此时, 若 $0 < a < 1$, 则系统呈低通特性, 而 $-1 < a < 0$, 则系统呈高通特性。

由 $h(n)$ 看出此系统的冲激响应是无限长的序列。

〔例 2-15〕 设系统的差分方程为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + ax(n-1) + a^2x(n-2) + \cdots + a^{M-1}x(n-M+1) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} a^k x(n-k) \end{aligned}$$

这就是 $M-1$ 个单元延时及 M 个抽头加权后相加所组成的电路, 常称之为横向滤波器。求其频率响应。

解 令 $x(n) = \delta(n)$, 将所给差分方程等式两端取 z 变换, 可得系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} a^k z^{-k} = \frac{1 - a^M z^{-M}}{1 - az^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)}, \quad |z| > 0$$

$H(z)$ 的零点满足

$$z^M - a^M = 0$$

即

$$z_i = ae^{j\frac{2\pi i}{M}}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

如果 a 为正实数, 这些零点等间隔地分布在 $|z| = a$ 的圆周上, 其第一零点为 $z_0 = a$ ($i = 0$), 它正好和单极点 $z_p = a$ 相抵消, 所以整个函数有 $(M-1)$ 个零点 $z_i = ae^{j\frac{2\pi i}{M}}$ ($i = 1, 2, \cdots, M-1$), 而在 $z=0$ 处有 $(M-1)$ 阶极点。

当输入为 $x(n) = \delta(n)$ 时, 系统只延时 $(M-1)$ 位后就不存在了, 故单位抽样响应 $h(n)$ 只有 M 个值, 即

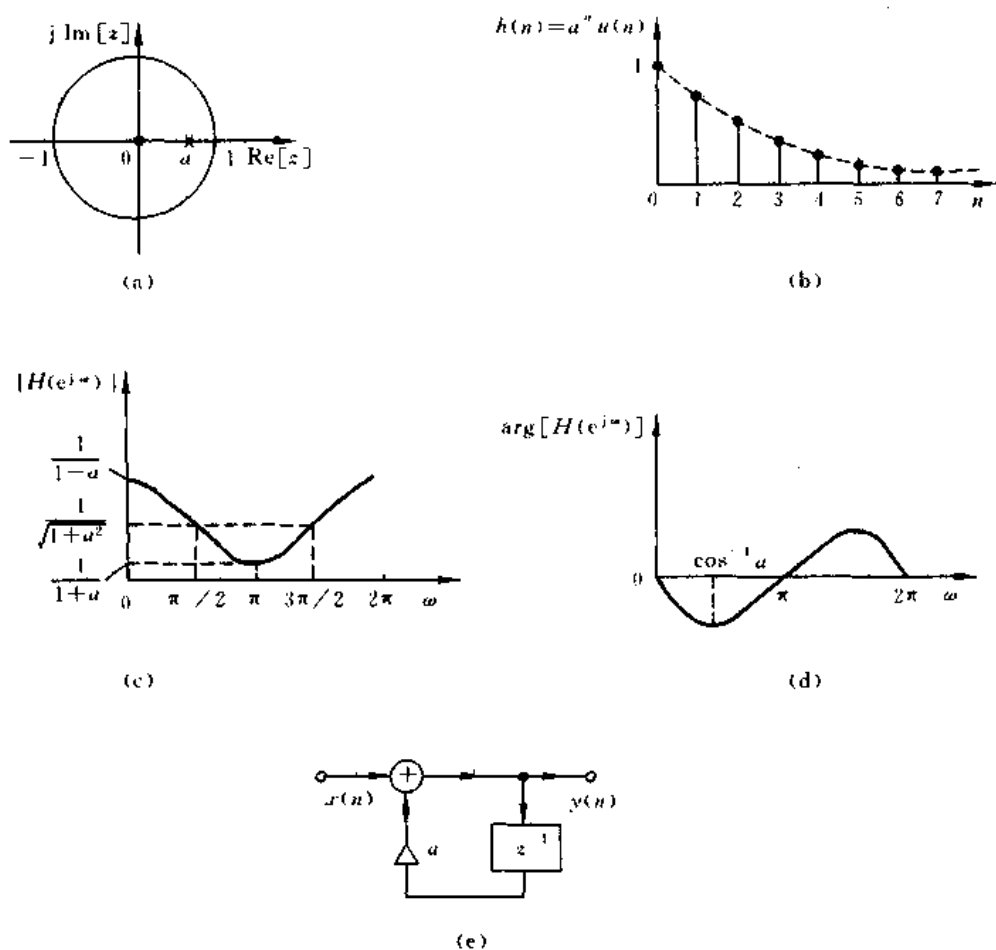


图 2-20 一阶系统的结构与特性

(a) 零极点分布; (b) 冲激响应 ($0 < a < 1$); (c) 幅度响应; (d) 相位响应; (e) 一阶系统结构图

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

图 2-21 示出 $M=6$ 及 $0 < a < 1$ 条件下的零、极点分布, 频率响应, 单位抽样响应以及结构图。频率响应的幅度在 $\omega=0$ 处为峰值, 而在 $H(z)$ 的零点附近的频率处, 频率响应的幅度为凹谷。可以用零、极点矢量图来解释此频率响应。从 $h(n)$ 看出, 其冲激响应是有限长的序列。

五、无限长单位冲激响应(IIR)系统与有限长单位冲激响应(FIR)系统

从离散时域来看, 若系统的单位抽样(冲激)响应延伸到无穷长, 称之为“无限长单位冲激响应系统”, 简称为 IIR 系统(如例 2-14 中的冲激响应)。若系统的单位抽样(冲激)响应是一个有限长序列, 称之为“有限长单位冲激响应系统”简称为 FIR 系统(如例 2-15 中的冲激响应)。

从系统函数的表达式(2-76)式

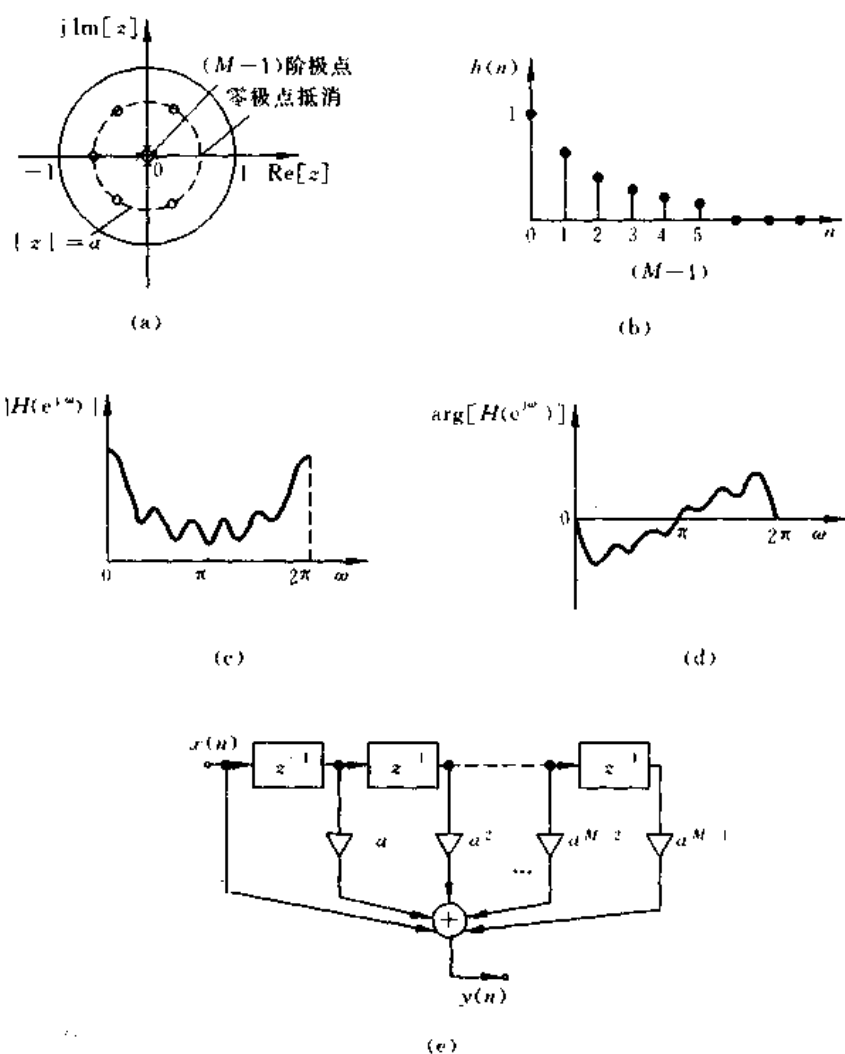


图 2-21 横向滤波器的结构与特性

(a) 零极点分布; (b) 冲激响应; (c) 幅度响应; (d) 相位响应; (e) 横向网络结构图

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

来看,一般可归一化为 $a_0=1$ (用 a_0 除分子、分母的每一项即可),表示成

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2-91)$$

只要(2-91)式的分母多项式有一个系数 $a_k \neq 0$,则在有限 z 平面就会出现极点,这个系统就是 IIR 系统。这可分为两种情况,一种是分子只有常数项 b_0 ,此时在有限 z 平面只有极点,称为全极点系统,或称自回归系统(AR 系统)。另一种是 $H(z)$ 是有理函数,如(2-91)

式所示,在有限 z 平面既有极点也有零点称为零极点系统或称自回归滑动平均系统(AR-MA 系统)。如果全部 $a_k=0(k=1,2,\dots,N)$,则系统就属于 FIR 系统。这是因为前面已说过,有限长序列 $h(n)$ 的 z 变换 $H(z)$ 在有限 z 平面 $0<|z|<\infty$ 处收敛,也就是说, $H(z)$ 在有限 z 平面不能有极点,只存在零点,因此又称为全零点系统,或称滑动平均系统(MA 系统)。

从结构类型来看,IIR 系统至少有一个 $a_k \neq 0$,其差分方程表达式(设 $a_0=1$)为

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

可以看出, $a_k \neq 0$,求 $y(n)$ 时,需将各 $y(n-k)$ 反馈回来,用 a_k 加权后和各 $b_m x(n-m)$ 相加,因而有反馈环路,这种结构称为“递归型”结构。也可以看出,IIR 系统输出不但和各 $x(n-m)$ 有关,且和各 $y(n-k)$ 有关。

如果全部 $a_k=0(k=1,2,\dots,N)$,则没有反馈结构,称之为“非递归”结构。也可以看出,FIR 系统的输出只和各输入 $x(n-m)$ 有关。

IIR 系统只能采用递归型结构,FIR 系统多采用非递归结构,但用零点、极点互相抵消的办法,则也可采用含有递归结构的电路。

由于 IIR 系统和 FIR 系统的特性和设计方法都不相同,因而成为数字滤波器的两大分支,所以我们将分别加以讨论。

习 题

1. 求以下序列的 z 变换并画出零极点图和收敛域:

(1) $x(n) = a^{1/n}$

(2) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(3) $x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

(4) $x(n) = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

(5) $x(n) = n \sin(\omega_0 n), \quad n \geq 0 (\omega_0 \text{ 为常数})$

(6) $x(n) = A r^n \cos(\omega_0 n + \Phi) u(n), \quad 0 < r < 1$

2. 假如 $x(n)$ 的 z 变换代数表示式是下式,问 $X(z)$ 可能有多少不同的收敛域,它们分别对应什么序列?

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

3. 用长除法、留数定理、部分分式法求以下 $X(z)$ 的 z 反变换:

(1) $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$

(2) $X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4}$

(3) $X(z) = \frac{z-a}{1-az}, \quad |z| > \left|\frac{1}{a}\right|$

4. 有一右边序列 $x(n)$,其 z 变换为 $X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$

- (a) 将上式作部分分式展开(用 z^{-1} 表示), 由展开式求 $x(n)$ 。
 (b) 将上式表示成 z 的多项式之比, 再作部分分式展开, 由展开式求 $x(n)$, 并说明所得到的序列与 (a) 所得的是一样的。

5. 对因果序列, 初值定理是 $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, 如果序列为 $n > 0$ 时 $x(n) = 0$, 问相应的定理是什么? 讨论一个序列 $x(n)$, 其 z 变换为

$$X(z) = \frac{\frac{7}{12} - \frac{19}{24}z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$X(z)$ 的收敛域包括单位圆, 试求其 $x(0)$ (序列) 值。

6. 有一信号 $y(n]$, 它与另两个信号 $x_1(n]$ 和 $x_2(n]$ 的关系是

$$y(n) = x_1(n+3) * x_2(-n-1)$$

其中 $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, 已知 $\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$, 利用 z 变换性质求 $y(n]$ 的 z 变换 $Y(z)$ 。

7. 求以下序列 $x(n]$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$:

- (1) $\delta(n-n_0)$, (2) $e^{-an} u(n)$
 (3) $e^{-(a+j\omega_0)n} u(n)$ (4) $e^{-an} u(n) \cos(\omega_0 n)$

8. 若 $x_1(n]$, $x_2(n]$ 是因果稳定的实序列, 求证

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega}) d\omega = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) d\omega \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega}) d\omega \right\}$$

9. 求 $x(n] = R_3(n]$ 的傅里叶变换。

10. 设 $X(e^{j\omega})$ 是如图 P2-10 所示的 $x(n]$ 信号的傅里叶变换, 不必求出 $X(e^{j\omega})$, 试完成下列计算:

- (a) $X(e^{j0})$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$
 (c) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$

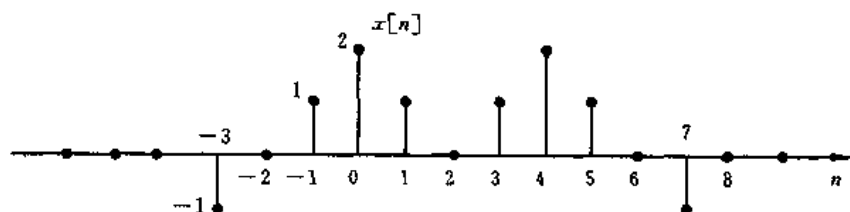


图 P2-10

11. 已知 $x(n]$ 有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 用 $X(e^{j\omega})$ 表示下列信号的傅里叶变换:

- (a) $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$ (b) $x_2(n) = \frac{x^*(-n) + x(n)}{2}$
 (c) $x_2(n) = (n-1)^2 x(n)$

12. 已知用下列差分方程描述的一个线性移不变因果系统:

$$y(n] = y(n-1] + y(n-2] + x(n-1]$$

- (a) 求这个系统的系统函数, 画出其零极点图并指出其收敛区域;
 (b) 求此系统的单位抽样响应;
 (c) 此系统是一个不稳定系统, 请找一个满足上述差分方程的稳定的 (非因果) 系统的单位抽样

响应。

13. 研究一个输入为 $x(n]$ 和输出为 $y(n]$ 的时域线性离散移不变系统, 已知它满足 $y(n-1) - \frac{10}{3}y(n) + y(n+1) = x(n]$, 并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。

14. 研究一个满足下列差分方程的线性移不变系统, 该系统不限定为因果、稳定系统。利用方程的零极点图, 试求系统单位抽样响应的三种可能选择方案。

$$y(n-1) - \frac{5}{2}y(n) + y(n+1) = x(n]$$

15. 有一个用以下差分方程表示的线性移不变因果系统:

$$y(n] - 2ry(n-1)\cos\theta + r^2y(n-2) = x(n]$$

当激励 $x(n] = a^n u(n]$ 时, 求系统的响应。请用 z 变换来求解。

16. 图 P2-16 是一个因果稳定系统的结构, 试列出系统差分方程, 求系统函数。当 $b_0 = 0.5, b_1 = 1, a_1 = 0.5$ 时, 求系统单位冲激响应, 画出系统零极点图和频率响应曲线。

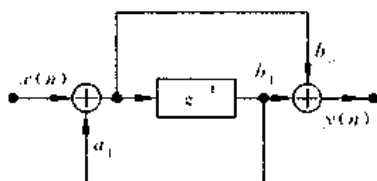


图 P2-16

17. 设 $x(n]$ 是一离散时间信号, 其 z 变换为 $X(z)$, 对下列信号利用 $X(z)$ 求它们的 z 变换:

(a) $x_1(n] = \nabla x(n]$, 这里 ∇ 记作一次后向差分算子, 定义为:

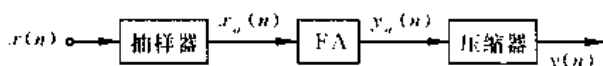
$$\nabla x(n] = x(n] - x(n-1]$$

$$(b) \ x_2(n] = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$(c) \ x_3(n] = x(2n]$$

18. 图 P2-18 是由抽样器、压缩器和数字滤波器 (FA 或 FB) 组成的两种信号处理系统。

系统 A:



系统 B:

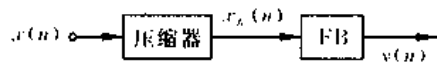


图 P2-18

(1) 抽样器完成下列运算: 保留 $x(n]$ 的偶数点。

$$x(n] \xrightarrow{\text{抽样器}} x_1(n] = \begin{cases} x(n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

试求 $x(n]$ 经抽样器输出 $x_1(n]$ 的傅里叶变换。

(2) 压缩器对 $x(n]$ 进行序列偶数点的重排。



试求 $x(n)$ 经压缩器输出 $g_2(n)$ 的傅里叶变换。

(3) 已知系统 A 中的数字滤波器 FA 的冲激响应为

$$h_a(n) = a^n u(n) \quad (0 < a < 1)$$

若使系统 A 与系统 B 等效, 求系统 B 中数字滤波器 FB 的频率响应 $H_b(e^{j\omega})$ 及其相应的冲激响应 $h_b(n) = ?$

第三章 离散傅里叶变换

3.1 引言

前面讨论了序列的傅里叶变换和 z 变换表示。有限长序列在数字信号处理中是很重要的一种序列,当然可以用 z 变换和傅里叶变换来研究它,但是,可以导出反映它的“有限长”特点的一种有用工具是离散傅里叶变换(DFT)。离散傅里叶变换除了作为有限长序列的一种傅里叶表示法在理论上相当重要之外,而且由于存在着计算离散傅里叶变换的有效快速算法——快速傅里叶变换,因而离散傅里叶变换在各种数字信号处理的算法中起着核心作用。

有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)和周期序列的离散傅里叶级数(DFS)本质上是一样的。为了更好地理解 DFT,需要讨论 DFS。而为了讨论离散傅里叶级数与离散傅里叶变换,我们首先来回顾并讨论傅里叶变换的几种可能形式。

3.2 傅里叶变换的几种可能形式

我们知道,傅里叶变换就是建立以时间为自变量的“信号”与以频率为自变量的“频谱函数”之间的某种变换关系。所以,当自变量“时间”或“频率”取连续值或离散值时,就形成各种不同形式的傅里叶变换对。

一、连续时间、连续频率——傅里叶变换

这就是连续时间非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换关系,所得到的是连续的非周期的频谱密度函数 $X(j\Omega)$ 。在“信号与系统”课的内容中,已知这一变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (3-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3-2)$$

这一变换对的示意图(只说明关系,并不表示实际的变换对)见图 3-1。可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱,而时域的非周期性造成频域是连续的谱密度函数。

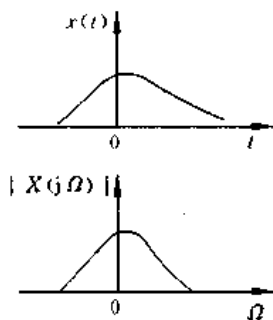


图 3-1 连续的非周期信号及其非周期、连续的频谱密度

二、连续时间、离散频率——傅里叶级数

设 $x(t)$ 代表一个周期为 T_0 的周期性连续时间函数, $x(t)$ 可展成傅里叶级数,其傅里叶级数的系数为 $X(jk\Omega_0)$, $X(jk\Omega_0)$ 是离散频率的非周期函数, $x(t)$ 和 $X(jk\Omega_0)$ 组成变换

对,表示为

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3-3)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3-4)$$

其中 $\Omega_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_0}$ 为离散频谱相邻两谱线之间的角频率间隔, k 为谐波序号。

这一变换对的示意图如图 3-2 所示。可以看出,时域的连续函数造成频域是非周期的频谱函数,而频域的离散频谱就与时域的周期时间函数相对应。

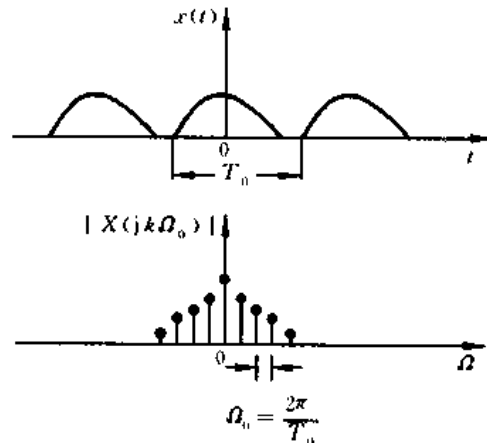


图 3-2 连续的周期信号及其非周期的离散谱线

三、离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换

这正是第二章中讨论过的序列(离散时间信号)的傅里叶变换对,即

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-6)$$

这里的 ω 是数字频率,它和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega = \Omega T$ 。

如果把序列看成模拟信号的抽样,抽样时间间隔为 T ,抽样频率为 $f_s = 1/T$, $\Omega_s = 2\pi/T$,则这一变换对也可写成(代入 $x(n) = x(nT)$, $\omega = \Omega T$)

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\Omega T} \quad (3-7)$$

$$x(nT) = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X(e^{j\Omega T}) e^{jn\Omega T} d\Omega \quad (3-8)$$

这一变换对的示意图如图 3-3 所示,图中都注明了两种自变量坐标,在时域是 t 和 n ,在频域是模拟频率 Ω 和数字频率 ω 。

同样可看出,时域的离散化造成频域的周期延拓,而时域的非周期对应于频域的连续,这正是我们在第二章中讨论过的。

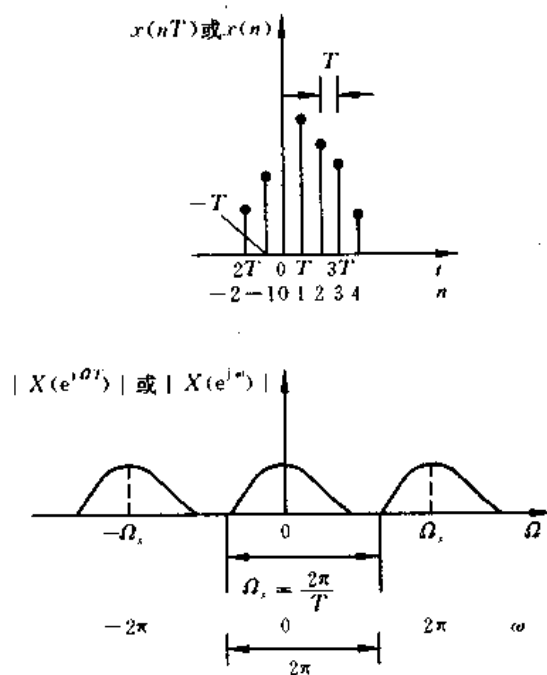


图 3-3 离散非周期信号及其周期性的连续谱密度

四、离散时间、离散频率——离散傅里叶变换

上面讨论的三种傅里叶变换对都不适于在计算机上运算,因为它们至少在一个域(时域或频域)中函数是连续的。因而从数字计算角度出发,我们感兴趣的是时域及频域都是离散的情况,这就是我们这里要谈到的离散傅里叶变换。

离散傅里叶变换的全面讨论将在下几节中进行,这里只是引入一些结果。首先应指出,这一变换对是针对有限长序列或周期序列才存在的;其次,它相当于把序列的连续傅里叶变换(3-7)式加以离散化(抽样),频域的离散化造成时间函数也呈周期,故级数应限制在一个周期之内。令 $\Omega = k\Omega_0 = k \cdot 2\pi F_0$, 则 $d\Omega = \Omega_0$, 因而从(3-7)式与(3-8)式可得离散傅里叶变换对为

$$X(e^{jkF_0}) = X(e^{jk\Omega_0 T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jn k\Omega_0 T} \quad (3-9)$$

$$x(nT) = \frac{\Omega_0}{\Omega_s} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T}) e^{jn k\Omega_0 T} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T}) e^{jn k\Omega_0 T} \quad (3-10)$$

其中 $\frac{f_s}{F_0} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = N$ 表示有限长序列(时域及频域)的抽样点数,或周期序列一个周期的抽样点数。

时间函数是离散的,其抽样间隔为 T ,故频率函数的周期(即抽样频率)为 $f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{1}{T}$ 。又因为频率函数是离散的,其抽样间隔为 F_0 ,故时间函数的周期 $T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$,又有

$$\Omega_0 T = \frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{N}$$

将它代入(3-9)式及(3-10)式,得到另一种也是更常用的离散傅里叶变换对表达式:

$$\text{正变换} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-11)$$

$$\text{反变换} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-12)$$

其中 $X(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, $x(n) = x(nT)$ 。

当然,也可由上面说到的第二种周期性连续时间函数的抽样而导出这里的变换对,则 $1/N$ 的系数将由反变换(3-12)式处移到正变换(3-11)式处,显然这只差一个常数,对函数的形状是没有影响的。

这一变换对的示意图如图 3-4 所示。由图看出,时域和频域都是离散的和周期的。总之,一个域的离散就必然造成另一个域的周期延拓。因为这种离散变换,本质上都是周期的,所以我们先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论,然后再讨论可作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

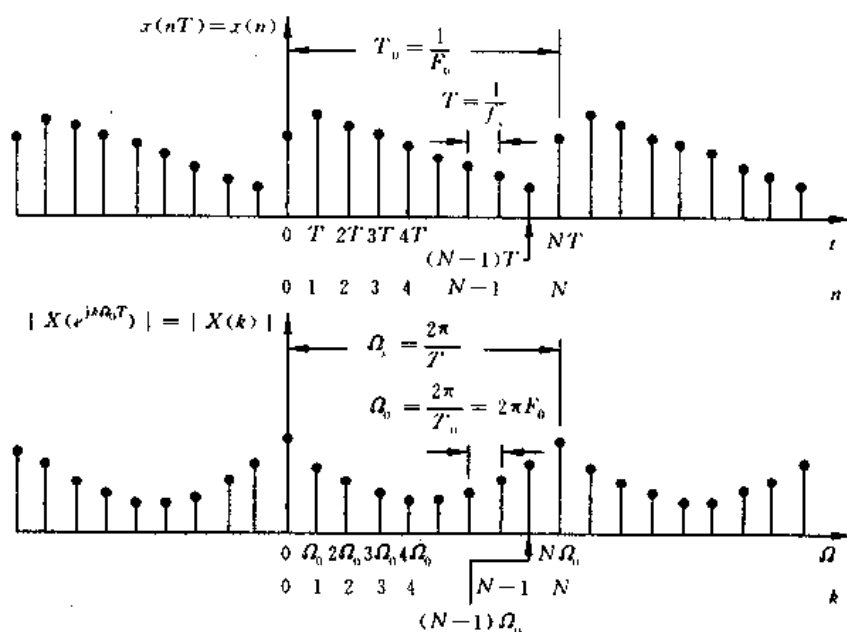


图 3-4 离散周期的时间函数及其周期离散的频谱函数, $N = \frac{f_s}{F_0} = \frac{T_0}{T}$

表 3-1 对四种傅里叶变换形式特点作了简要归纳。

表 3-1 四种傅里叶变换形式的归纳

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期(T_0)	非周期和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$)
离散(T)和非周期	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和连续
离散(T)和周期(T_0)	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$)

3.3 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的一个周期序列, 即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN), \quad r \text{ 为任意整数}$$

周期序列不是绝对可和的, 所以不能用 z 变换表示, 因为在任何 z 值下, 其 z 变换都不收敛, 也就是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z^{-n}| = \infty$$

但是, 和连续时间周期信号一样, 周期序列可用离散傅里叶级数来表示, 也就是用周期为 N 的复指数序列(代表正弦型序列)来表示, 把连续周期信号与离散周期序列的复指数用以下表格来加以对比。

	基频序列	周期	基频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$	T_0	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

所以周期为 N 的复指数序列的基频序列为

$$e_1(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$$

其 k 次谐波序列

$$e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$$

虽然表现形式上和连续周期函数是相同的, 但是离散傅里叶级数的谐波成分只有 N 个是独立成分, 这是和连续傅里叶级数不同之处(后者有无穷多个谐波成分)。原因是

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad r \text{ 为任意整数}$$

也就是

$$e_{k+rN}(n) = e_k(n)$$

因而对离散傅里叶级数, 只能取 $k=0$ 到 $N-1$ 的 N 个独立谐波分量, 不然就会产生二义性。因而 $\tilde{x}(n)$ 可展成如下的离散傅里叶级数, 即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3-13)$$

这里的 N 是一个常用的常数, 选取它是为了下面的 $\tilde{X}(k)$ 表达式成立的, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数。下面我们来求解系数 $\tilde{X}(k)$, 这要利用以下性质, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} \\ &= \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } r \end{cases} \end{aligned} \quad (3-14)$$

将(3-13)式两端同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$, 然后从 $n=0$ 到 $N-1$ 的一个周期内求和, 则得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \\ &= \tilde{X}(r)\end{aligned}$$

把 r 换成 k 可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3-15)$$

这就是求 $k=0$ 到 $N-1$ 的 N 个谐波系数 $\tilde{X}(k)$ 的公式。同时看出 $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列, 即

$$\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k)$$

这和(3-13)式的复指数只在 $k=0, 1, \dots, N-1$ 时才各不相同, 即离散傅里叶级数只有 N 个不同的系数 $\tilde{X}(k)$ 的说法是一致的。所以可看出, 时域周期序列的离散傅里叶级数在频域(即其系数)也是一个周期序列。因而我们把(3-13)式与(3-15)式一起看作是周期序列的离散傅里叶级数(DFS)对。

一般书上常采用以下符号:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

则(3-15)式及(3-13)式可表示成

$$\text{正变换} \quad \tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \quad (3-16)$$

$$\text{反变换} \quad \tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \quad (3-17)$$

DFS[·]表示离散傅里叶级数正变换, IDFS[·]表示离散傅里叶级数反变换。

从上面看出, 只要知道周期序列的一个周期的内容, 则它的其他内容也知道了。所以, 实际上只有 N 个序列值(而不是无穷个序列值)有信息, (3-16)式与(3-17)式都只取 N 点序列值正说明这一意义。因而周期序列和有限长序列有着本质的联系。

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是对 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 作 z 变换, 然后将 z 变换在 z 平面单位圆上按等间隔角 $\frac{2\pi}{N}$ 抽样而得到的。令

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

则 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (3-18)$$

把(3-18)式与(3-16)式比较可知

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}} \quad (3-19)$$

可以看出, $\tilde{X}(k)$ 是在 z 平面单位圆上的 N 个等间隔角点上对 z 变换 $X(z)$ 的抽样, 而第一个抽样点为 $k=0$, 即出现在 $z=1$ 处, 图 3-5 画出了这些抽样点

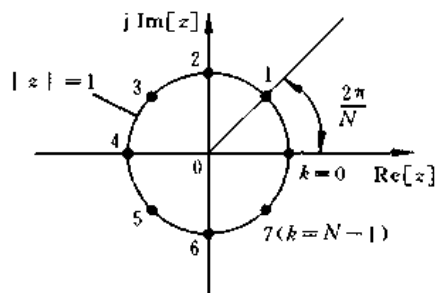


图 3-5 为了得到周期序列 $\tilde{X}(k)$, $X(z)$ 在 z 平面单位圆上抽样的各抽样点

3.4 离散傅里叶级数的性质

由于可以用抽样 z 变换来解释 DFS, 因此它的许多性质与 z 变换性质非常相似, 但是, 由于 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 两者都具有周期性, 这就使它与 z 变换性质还有一些重要差别。此外, DFS 在时域和频域之间具有严格的对偶关系, 这是序列的 z 变换表示所不具有的。

令 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 皆是周期为 N 的周期序列, 它们各自的 DFS 为

$$\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)], \quad \tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$$

一、线性

$$\text{DFS}[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (3-20)$$

其中 a, b 为任意常数, 所得到的频域序列也是周期序列, 周期为 N 。这一性质可由 DFS 定义直接证明, 留给读者自己去做。

二、序列的移位

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k) \quad (3-21)$$

证

$$\begin{aligned} \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} \\ &= \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} W_N^{-mk} \quad (i = n+m) \end{aligned}$$

由于 $\tilde{x}(i)$ 及 W_N^{ki} 都是以 N 为周期的周期函数, 故

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

三、调制特性

$$\text{DFS}[W_N^{ln} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l) \quad (3-22)$$

证

$$\text{DFS}[W_N^n \tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^n \tilde{x}(n) W_N^{kl} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{(l+k)n} = \tilde{X}(k+l)$$

四、周期卷积和

如果

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m) \end{aligned} \quad (3-23)$$

证

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) W_N^{-kn}$$

代入

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk}$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{X}_2(k) W_N^{-kn} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n-m)k} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \end{aligned}$$

将变量进行简单换元,即可得等价的表示式

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m)$$

(3-23)式是一个卷积和公式,但是它与非周期序列的线性卷积和不同。首先 $\tilde{x}_1(m)$ 和 $\tilde{x}_2(n-m)$ (或 $\tilde{x}_2(m)$ 与 $\tilde{x}_1(n-m)$) 都是变量 m 的周期序列,周期为 N ,故乘积也是周期为 N 的周期序列,其次,求和只在一个周期上进行,即 $m=0$ 到 $N-1$,所以称为周期卷积。

图 3-6 用来说明两个周期序列(周期为 $N=6$)的周期卷积的形成过程。过程中,一个周期的某一序列值移出计算区间时,相邻的一个周期的同一位置的序列值就移入计算区间。运算在 $m=0$ 到 $N-1$ 区间内进行,先计算出 $n=0,1,\dots,N-1$ 的结果,然后将所得结果周期延拓,就得到所求的整个周期序列 $\tilde{y}(n)$ 。

同样,由于 DFS 和 IDFS 的对称性,可以证明(请读者自己证明)时域周期序列的乘积对应着频域周期序列的周期卷积。即,如果

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(k) &= \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l) \end{aligned} \quad (3-24)$$

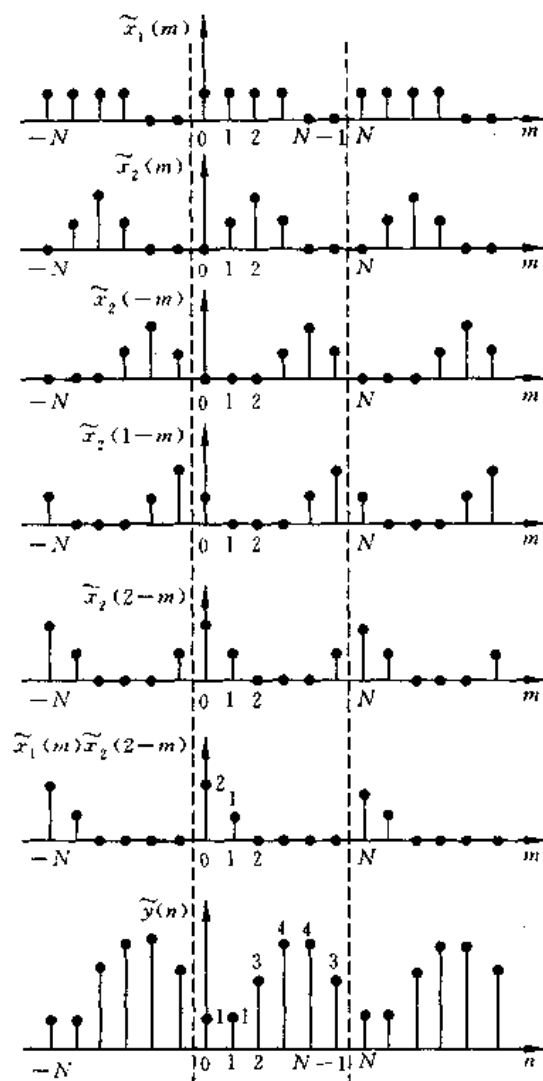


图 3-6 两个周期序列($N=6$)的周期卷积过程

3.5 离散傅里叶变换(DFT)——有限长序列的离散频域表示

上一节说到,周期序列实际上只有有限个序列值有意义,因而它的离散傅里叶级数表示式也适用于有限长序列,这就得到有限长序列的离散傅里叶变换。

实际上,可以把长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 看成周期为 N 的周期序列的一个周期,这样利用离散傅里叶级数计算周期序列的一个周期,也就是计算了有限长序列。

设 $x(n)$ 为有限长序列,点数为 N ,即 $x(n)$ 只在 $n=0 \sim N-1$ 有值,其他 n 时, $x(n)=0$ 。我们把它看成周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期,而把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的以 N 为周期的周期延拓,即表示成

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (3-25)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (3-26)$$

通常把 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 $n=0$ 到 $n=N-1$ 定义为“主值区间”，故 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”。对不同 r 值 $x(n+rN)$ 之间彼此并不重叠，故上式可写成

$$\tilde{x}(n) = x(n \text{ 模 } N) = x((n))_N \quad (3-27)$$

用 $((n))_N$ 表示 $(n \text{ 模 } N)$ ，其数学上就是表示“ n 对 N 取余数”，或称“ n 对 N 取模值”。

令

$$n = n_1 + mN, \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, m \text{ 为整数}$$

则 n_1 为 n 对 N 的余数，不管 n_1 加上多少倍的 N ，其余数皆为 n_1 ，也就是说，周期性重复出现的 $x((n))_N$ 数值是相等的。

例如， $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $N=9$ 的序列，求 $n=25, n=-5$ 两数对 N 的余数。

因为

$$n = 25 = 2 \times 9 + 7, \quad \text{故 } ((25))_9 = 7$$

$$n = -5 = (-1) \times 9 + 4, \quad \text{故 } ((-5))_9 = 4$$

因此 $\tilde{x}(25) = x((25))_9 = x(7)$, $\tilde{x}(-5) = x((-5))_9 = x(4)$

利用前面的矩形序列的符号 $R_N(n)$ ，即

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

则(3-25)式可写成

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-28)$$

同理，对频域的周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可看成是对有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓，而有限长序列 $X(k)$ 看成周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列，即

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3-29)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-30)$$

从(3-16)式与(3-17)式的 DFS 及 IDFS 的表达式看出，求和是只限定在 $n=0$ 到 $N-1$ 及 $k=0$ 到 $N-1$ 的主值区间进行，故完全适用于主值序列 $x(n)$ 与 $X(k)$ ，因而我们可以得到新的定义，即有限长序列的离散傅里叶变换定义

$$\text{正变换 } X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-31)$$

$$\text{反变换 } x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-32)$$

或简练地表示成

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}R_N(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-33)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}R_N(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-34)$$

所以 $x(n)$ 和 $X(k)$ 是一个有限长序列的离散傅里叶变换对。已知其中的一个序列，就能惟一地确定另一个序列。这是因为 $x(n)$ 与 $X(k)$ 都是点数为 N 的序列，都有 N 个独

立值(可以是复值),所以信息当然等量。

点数为 N 的有限长序列和周期为 N 的周期序列,都是由 N 个值来定义。但是我们要记住,凡是说到离散傅里叶变换关系之处,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的,都隐含有周期性意义。

3.6 离散傅里叶变换的性质

本节讨论 DFT 的一些性质,它们本质上是和周期序列的 DFS 概念有关的,而且是由有限长序列及其 DFT 表示式隐含的周期性得出的。以下讨论的序列都是 N 点有限长序列,且设

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

一、线性

设两个有限长序列为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 则

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3-35)$$

其中 a, b 为任意常数。该式可由 DFT 定义直接证明,留给读者自己去做。

但是要说明如下:

(1) 如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 皆为 N 点,即在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围有值,则 $aX_1(k) + bX_2(k)$ 也是 N 点序列;

(2) 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的点数不等,设 $x_1(n)$ 为 N_1 点 ($0 \leq n \leq N_1-1$), 而 $x_2(n)$ 为 N_2 点 ($0 \leq n \leq N_2-1$), 则 $ax_1(n) + bx_2(n)$ 应为 $N = \max[N_1, N_2]$ 点,故 DFT 必须按 N 计算。例如,若 $N_1 < N_2$, 则取 $N = N_2$, 那么需将 $x_1(n)$ 补上 $N_2 - N_1$ 个零值点后变为 N_2 点的序列,然后都作 N_2 点的 DFT, 即

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{n=0}^{N_2-1} x_1(n) W_{N_2}^{kn} R_{N_2}(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{N_2}nk} R_{N_2}(k) \\ X_2(k) &= \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n) W_{N_2}^{kn} R_{N_2}(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N_2}nk} R_{N_2}(k) \end{aligned}$$

二、序列的圆周移位

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位是指用它的点数 N 为周期,将其延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$, 将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 加以移位,然后取主值区间 ($n=0$ 到 $N-1$) 上的序列值。因而一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (3-36)$$

式中 $x((n+m))_N$ 表示 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的移位

$$x((n+m))_N = \tilde{x}(n+m) \quad (3-37)$$

乘 $R_N(n)$ 表示对此延拓移位后的周期序列取主值序列,即 $x((n+m))_N R_N(n)$, 因而 $x_m(n)$ 还是一个 N 点的有限长序列,这一过程可见图 3-7 所示。

从图上可以看出,由于是周期序列的移位,当我们只观察 $n=0$ 到 $N-1$ 这一区间时,

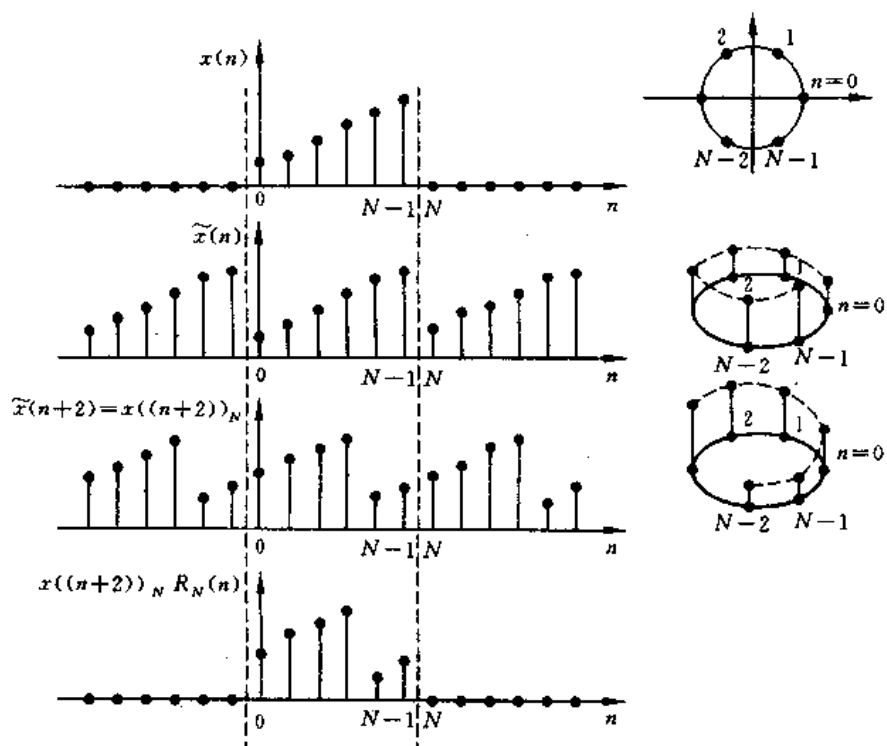


图 3-7 序列的圆周移位过程($N=6$)

当某抽样从此区间的一端移出时,与它相同值的抽样又从此区间的另一端进来了。因而,可以看成 $x(n)$ 是排列在一个 N 等分的圆周上,序列 $x(n)$ 的圆周移位,就相当于 $x(n)$ 在此圆上旋转,如图 3-7 右图所示,因而称为圆周移位。实际上围绕圆周观察几圈时,看到的的就是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 。

有限长序列为 $x(n), 0 \leq n \leq N-1$, 若 $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

则 $X_m(k) = \text{DFT}[x_m(n)] = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (3-38)$

证 采用周期序列的移位性质来加以证明

$$\text{DFS}[x((n+m))_N] = \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

再利用 DFS 和 DFT 关系的性质,即利用 (3-28) 式及 (3-30) 式,序列取主值区间,变换也取主值区间,即得

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \text{DFT}[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk} \tilde{X}(k) R_N(k) \\ &= W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

这表明,有限长序列的圆周移位,在离散频域中只引入一个和频率成正比的线性相移 $W_N^{-mk} = e^{(j2\pi/N)km}$, 对频谱的幅度是没有影响的。

同样,对于频域的有限长序列 $X(k)$,也可看成是分布在一个 N 等分的圆周上,所以对于 $X(k)$ 的圆周移位,利用频域与时域的对偶关系,可以证明以下性质(请读者自己证明):

若

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

则

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^l x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n) \quad (3-39)$$

这就是调制特性,它说明,时域序列的调制等效于频域的圆周移位。由此式可以得出以下两个公式,请读者自己证明:

$$\text{DFT}\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N + X((k+l))_N]R_N(k) \quad (3-40)$$

$$\text{DFT}\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2j}[X((k-l))_N - X((k+l))_N]R_N(k) \quad (3-41)$$

三、共轭对称性

在第二章 2.7 节中讨论了序列傅里叶变换的一些对称性质,且定义了共轭对称序列与共轭反对称序列的概念,指出任一序列都可表示成共轭对称分量与共轭反对称分量之和。

在讨论有限长序列的离散傅里叶变换时,因为隐含有周期性,周期等于序列长度 N ,因而不能采用 2.7 节的定义。因为,对于 N 点的序列,按那里的定义算出的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 及共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 都是 $(2N-1)$ 点。所以我们这里是从周期序列的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 与共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 入手,因为它们都是周期性的,周期仍为 N ,取出它们的主值序列就得到了有限长序列的相应的分量,分别称圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 。用公式推导如下:

设有限长序列为 $x(n)$, 长度为 N 点。它的以 N 为周期的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 为

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (3-42)$$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 及共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 分别为

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N] \quad (3-43)$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N] \quad (3-44)$$

同样可以证明,它们满足

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n) \quad (3-45)$$

$$\tilde{x}_o(n) = -\tilde{x}_o^*(-n) \quad (3-46)$$

则有限长序列为 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 分别定义为

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n) \quad (3-47)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n) \quad (3-48)$$

由于满足

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n) \quad (3-49)$$

故

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = [\tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)]R_N(n)$$

即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad (3-50)$$

也就是点数为 N 的有限长序列 $x(n)$ 可以分解成相同点数的两个分量, 即圆周共轭对称分量 $x_{cp}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和。显然这里的 $x_{cp}(n)$ 与 2.7 节的 $x_c(n)$ 并不相同, $x_{op}(n)$ 与 2.7 节的 $x_o(n)$ 也不相同。

利用(3-47)式、(3-48)式及(3-50)式的关系, 并考虑到 DFS 和 DFT 的关系, 可以推出 DFT 的以下一些对称性质。

设 $\text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}\{\text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)]\}$, 则有

$$(1) \quad \text{DFT}[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) \quad (3-51)$$

式中 $x^*(n)$ 表示 $x(n)$ 的共轭复序列。

证

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n^*k} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((N-k))_N R_N(k) \end{aligned}$$

这里利用了

$$(2) \quad W_N^{nN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{-j2\pi n} = 1$$

$$\text{DFT}[x^*((-n))_N R_N(n)] = X^*(k) \quad (3-52)$$

证

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*((-n))_N R_N(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) W_N^{nk} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N W_N^{-n^*k} \right]^* = \left[\sum_{n=-(N-1)}^0 x((n))_N W_N^{nk} \right]^* \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{nk} \right]^* \quad (\text{利用周期性}) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right]^* = X^*(k) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{DFT}\{\text{Re}[x(n)]\} = X_{cp}(k) = \frac{1}{2}[X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k) \quad (3-53)$$

证 由于 $\text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$

故

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{\text{Re}[x(n)]\} &= \frac{1}{2}\{\text{DFT}[x(n)] + \text{DFT}[x^*(n)]\} \\ &= \frac{1}{2}[X(k) + X^*((N-k))_N R_N(k)] \\ &= \frac{1}{2}[X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k) \\ &= X_{cp}(k) \end{aligned}$$

这说明复序列实部的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭对称分量。

$$(4) \quad \text{DFT}\{j\text{Im}[x(n)]\} = X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X((k))_N - X^*((N-k))_N]R_N(k) \quad (3-54)$$

证 由于
$$j\text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

故

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{j\text{Im}[x(n)]\} &= \frac{1}{2}\{\text{DFT}[x(n)] - \text{DFT}[x^*(n)]\} \\ &= \frac{1}{2}[X(k) - X^*((N-k))_N R_N(k)] \\ &= \frac{1}{2}[X((k))_N - X^*((N-k))_N]R_N(k) \\ &= X_{op}(k) \end{aligned}$$

这说明复序列虚部乘以 j 的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭反对称分量。由 (3-53) 式可以证明圆周共轭对称序列满足

$$X_{cp}(k) = X_{cp}^*((N-k))_N R_N(k) \quad (3-55)$$

它的含义是 $X_{cp}(k)$ 的模偶对称、辐角奇对称(或实部偶对称、虚部奇对称)。即

$$|X_{cp}(k)| = |X_{cp}((N-k))_N R_N(k)| \quad (3-56a)$$

$$\arg[X_{cp}(k)] = -\arg[X_{cp}((N-k))_N R_N(k)] \quad (3-56b)$$

也就是把 $X_{cp}(k)$ 看成分布在 N 等分的圆上, 在 $k=0$ 的左半圆上与右半圆上, 序列是共轭对称的(模偶对称、辐角奇对称, 或者实部偶对称、虚部奇对称)。图 3-8 就表示了这种圆周共轭对称性。

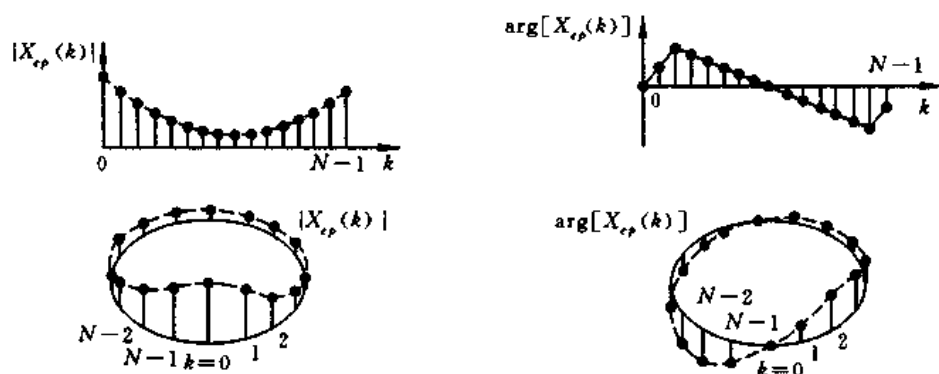


图 3-8 满足圆周共轭对称的序列 $x_{cp}(k)$

实际上, 对一个分布在 $0 \leq n \leq N-1$ 的 N 点实序列(可以是时域序列或是频域序列), 判断它的偶(奇)对称性的一种更简单的办法, 这就是将 $n=N$ 处补上与 $n=0$ 处相同的序列值, 如果此新的序列对 $n=N/2$ 而言是偶(奇)对称的, 则原序列一定是偶(奇)对称的, 否则就不是偶(奇)对称的。以时域序列为例, 如图 3-9 所示, $N=9$ 的某一序列为 $x(n)$, 按上述方法在 $n=N$ 处补上与 $n=0$ 处相同值(2)后的序列, 可以看出 $x_1(n)$ 对 $n=N/2$ 而言是偶对称的, 因此, 原序列是(圆周)偶对称序列, 同样, 用此法可以检查奇对称关系。

由 (3-54) 式同样可以证明, 圆周共轭反对称序列满足

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k) \quad (3-57)$$

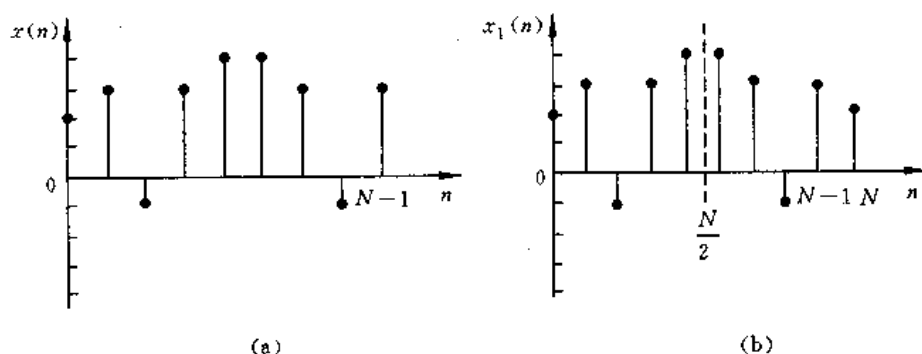


图 3-9 考查序列是否是圆周偶(奇)对称序列的办法
(a) 原序列; (b) 在 $n=N$ 处补上与 $n=0$ 处相同的序列值后的序列

它的含义是 $X_{op}(k)$ 的实部奇对称, 虚部偶对称。即

$$\operatorname{Re}[X_{op}(k)] = -\operatorname{Re}[X_{op}((N-k))_N R_N(k)] \quad (3-58a)$$

$$\operatorname{Im}[X_{op}(k)] = \operatorname{Im}[X_{op}((N-k))_N R_N(k)] \quad (3-58b)$$

也就是把 $X_{op}(k)$ 看成分布在 N 等分的圆上, 在 $k=0$ 的左半圆上与右半圆上, 序列是共轭反对称的(实部奇对称, 虚部偶对称)。

(5) 若 $x(n)$ 是实序列, 则显然 $X(k)$ 只有圆周共轭对称分量, 即满足

$$X(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) \quad (3-59)$$

(6) 若 $x(n)$ 是纯虚序列, 则显然 $X(k)$ 只有圆周共轭反对称分量, 即满足

$$X(k) = -X^*((N-k))_N R_N(k) \quad (3-60)$$

(5)、(6)两种情况, 不论哪一种, 只要知道一半数目 $X(k)$ 就可以了, 另一半可利用对称性求得, 这些性质在计算 DFT 时可以节约运算, 提高效率。

根据 $x(n)$ 与 $X(k)$ 的对称特性, 同样可以找到 $X(k)$ 的实部、虚部与 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量及圆周共轭反对称分量的关系为

$$(7) \quad \operatorname{DFT}[x_{op}(n)] = \operatorname{Re}[X(k)] \quad (3-61)$$

$$(8) \quad \operatorname{DFT}[x_{op}(n)] = j\operatorname{Im}[X(k)] \quad (3-62)$$

(7)、(8)两个性质, 请读者自己证明。

综上所述, 可以归纳证明出 $x(n)$ 与 $X(k)$ 的奇、偶、虚、实关系, 见表 3-2 所示。利用这些关系, 可以减少计算 DFT 的运算量。

表 3-2 序列及其 DFT 的实、虚、偶、奇关系

$x(n)$ [或 $X(k)$]	$X(k)$ [或 $x(n)$]
偶对称	偶对称
奇对称	奇对称
实数	实部为偶对称、虚部为奇对称
虚数	实部为奇对称、虚部为偶对称
实数偶对称	实数偶对称
实数奇对称	虚数奇对称
虚数偶对称	虚数偶对称
虚数奇对称	实数奇对称

当然,这里对有限长序列 $x(n)$ (或 $X(k)$) 的奇偶是指把序列排在一个圆周上,对 $n=0(k=0)$ 为对称中心的奇偶对称。表 3-2 的证明留给读者作为练习。

【例 3-1】利用共轭对称性,可以用一次 DFT 运算来计算两个实数序列的 DFT,因而可以减少计算量。

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点实数序列,试用一次 DFT 来计算它们各自的 DFT

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

解 先利用这两个序列构成一个复序列,即

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n) \quad (3-63)$$

则

$$\begin{aligned} \text{DFT}[w(n)] &= W(k) = \text{DFT}[x_1(n) + jx_2(n)] = \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] \\ &= X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

又

$$x_1(n) = \text{Re}[w(n)]$$

故由(3-53)式可得

$$X_1(k) = \text{DFT}\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{\text{re}}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*((N-k))_N]R_N(k) \quad (3-64a)$$

同样,由于 $x_2(n) = \text{Im}[w(n)]$

故由(3-54)式可得

$$X_2(k) = \text{DFT}\{\text{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{\text{im}}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*((N-k))_N]R_N(k) \quad (3-64b)$$

所以用一次 DFT 求出 $W(k)$ 后,再按以上公式即可求得 $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 。

利用共轭对称性还可以用 N 点 DFT,再加上一些附带的运算来计算一个 $2N$ 点的实数序列的 DFT,我们把这一问题作为习题,留给读者来完成,见本章习题。

四、DFT 形式下的帕塞瓦定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (3-65)$$

证

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-kn} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \end{aligned}$$

如果令 $y(n) = x(n)$, 则(3-65)式变成

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k)$$

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3-66)$$

这表明一个序列在时域计算的能量与在频域计算的能量是相等的。

五、圆周卷积和

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是点数为 N 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N-1$)

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

若
则

$$Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \end{aligned} \quad (3-67)$$

证 这个卷积和式子相当于周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 作周期卷积和后再取主值序列。先将 $Y(k)$ 周期延拓, 即

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

按照 DFS 的周期卷积和公式

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N$$

由于 $0 \leq m \leq N-1$, 为主值区间, 故

$$x_1((m))_N = x_1(m)$$

因此

$$y(n) = \tilde{y}(n) R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

将 $\tilde{y}(n)$ 式经过简单换元, 亦可证明

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

这一运算称为圆周卷积和, 它的卷积和过程可以用图 3-10 来表示, 可以看出它和周期卷积和过程是一样的, 只不过这里要取结果的主值序列。公式中的 $x_2((n-m))_N$ 只在 $m = 0$ 到 $N-1$ 范围内取值, 因而它就是圆周移位, 所以这一卷积和称为圆周卷积和, 用符号 \circledast 来表示。圆圈内的 N 表示所作的是 N 点圆周卷积和。

$$\begin{aligned} x_1(n) \circledast x_2(n) &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= x_2(n) \circledast x_1(n) \end{aligned} \quad (3-68)$$

利用时域与频域的对称性, 可以证明(请读者自己证明):

若

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

$x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 皆为 N 点有限长序列, 则

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N \right] R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N \right] R_N(k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \quad (3-69)$$

即时域序列相乘,乘积的 DFT 等于各个 DFT 的圆周卷积再乘以 $1/N$ 。

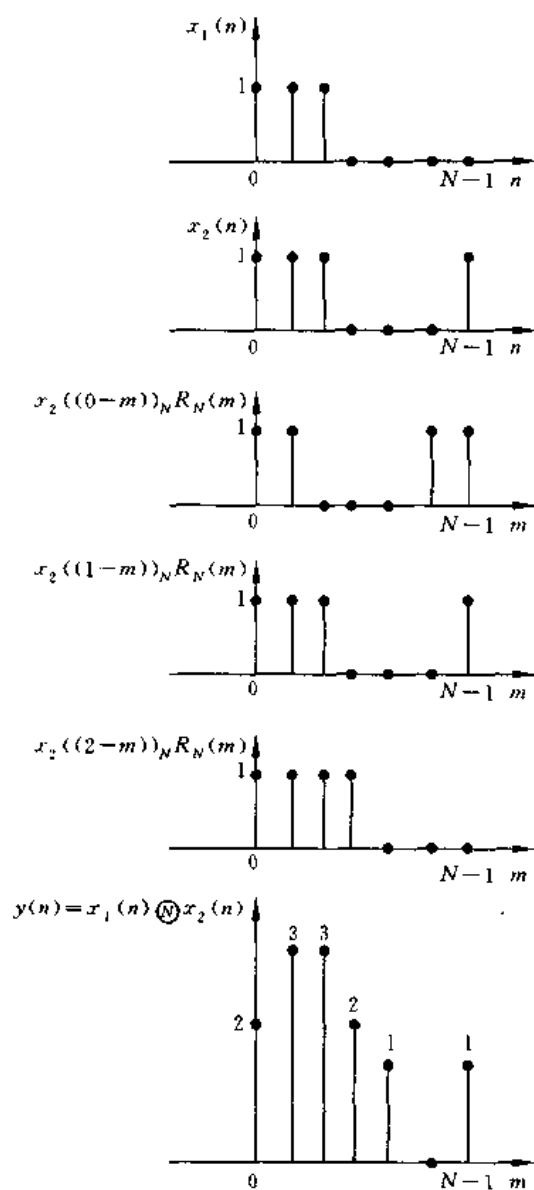


图 3-10 两个有限长序列 ($N=7$) 的圆周卷积和

六、圆周相关

在统计通信及数字信号处理中,相关(或称线性相关)的概念是一个十分重要的概念。相关函数和信号的功率谱有密切关系。通常利用相关函数来分析随机信号的功率谱密度,它对确定信号的分析也有一定的作用。所谓相关是指两个确定信号或两个随机信号之间的相互关系,对于随机信号,信号一般是不确定的,但是通过对它的规律进行统计,它的相关函数,往往是确定的,因而在随机信号的数字处理中,可以用相关函数来描述一

个平稳随机信号的统计特性。

同样在讨论有限长序列的离散傅里叶变换时,有圆周相关,它不同于线性相关,就好像圆周卷积不同于线性卷积一样。

线性相关定义为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m) \quad (3-70)$$

由此看出,相关的求解与卷积和的求解是相似的,但它没有“翻褶”这一步骤,而只包括平移、相乘与相加三个步骤,另外,相关函数不满足交换律,这是与卷积和不同的,因为

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)x^*(n-m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k)y(k+m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)y[n-(-m)] \\ &= r_{xy}^*(-m) \end{aligned} \quad (3-71)$$

一般, $r_{xy}(-m) \neq r_{xy}(m)$, 这是因为 $x(n)$ 与 $y(n+m)$ 的相似程度是和 $x(n)$ 与 $y(n-m)$ 的相似程度不同的, 在相关函数 $r_{xy}(m)$ 中的延时 m 是由 (3-70) 式中信号 $x(n)$ 的时间 n 减去信号 $y^*(n-m)$ 的时间 $(n-m)$ 得到的, 即

$$m = n - (n-m)$$

例如

$$\begin{aligned} r_{xy}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+l)y^*(n+p) = r_{xy}[(n+l)-(n+p)] \\ &= r_{xy}(l-p) \end{aligned} \quad (3-72)$$

因此

$$m = l - p$$

(3-70) 式还可写成

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)y^*(n) \quad (3-73)$$

当信号 $x(n)$ 与自身相关时, 我们称 $r_{xx}(m)$ 为 $x(n)$ 的自相关函数

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)x(n+m) = r_{xx}^*(-m) \quad (3-74)$$

相关函数的 z 变换为

$$\begin{aligned} R_{xy}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xy}(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m)z^{-m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y^*(n-m)z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y^*(m)z^{-(m-n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y^*(m)z^m \\ &= X(z)Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \end{aligned} \quad (3-75)$$

代入 $z=e^{j\omega}$, 可得其频谱为

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) \quad (3-76)$$

可以看出, 只有当 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 都不为零时, $R_{xy}(e^{j\omega})$ 才不为零, 这就说明, 相关函数只包含两个信号所共有的频率成分。

若
则有

$$y(n) = x(n)$$

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

圆周相关定理

若

$$R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k) \quad (3-77)$$

则

$$r_{xy}(m) = \text{IDFT}[R_{xy}(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N R_N(m) \quad (3-78)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N R_N(m)$$

证 先将 $\tilde{Y}^*(k), X(k)$ 周期延拓成周期序列

$$\tilde{R}_{xy}(k) = \tilde{X}(k)\tilde{Y}^*(k)$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{xy}(m) &= \text{IDFS}[\tilde{R}_{xy}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}^*(k)\tilde{X}(k)W_N^{-mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk} W_N^{-mk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}^*(k)W_N^{(n-m)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{Y}(k)W_N^{-(n-m)k})^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\tilde{y}^*(n-m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}^*(n)\tilde{x}(n+m) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\tilde{y}^*(n-m) \end{aligned}$$

等式两边取主值序列即得

$$\begin{aligned} r_{xy}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N R_N(m) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N R_N(m) \end{aligned} \quad (3-79)$$

当 $x_1(n), x_2(n)$ 为实序列时, 有

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)x((n+m))_N R_N(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N R_N(m) \quad (3-80)$$

(3-80)式即为有限长实序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的 N 点圆周相关, 而 $x((n+m))_N$ (或 $y((n-m))_N$) 只在 $n=0$ 到 $N-1$ 范围内取值正好是 $x(n)$ (或 $y(n)$) 的圆周移位, 哑变量是 n , 且不需翻褶。(3-80)式求和式也正是在主值区间 $0 \leq n \leq N-1$ 内进行的。

七、有限长序列的线性卷积与圆周卷积

时域圆周卷积在频域上相当于两序列的 DFT 的相乘, 因而可以采用 DFT 的快速算法——快速傅里叶变换 (FFT) 算法, 它与线性卷积相比, 计算速度可以大大加快。但是, 一般实际问题 (例如信号通过线性移不变系统) 都是线性卷积运算。如果信号以及系统的单位冲激响应都是有限长序列, 那么是否能用圆周卷积运算来代替线性卷积运算呢? 下

面来加以讨论。

设 $x_1(n)$ 是 N_1 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 是 N_2 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$)。

(1) 先看它们的线性卷积

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) \quad (3-81)$$

$x_1(m)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1 - 1$, $x_2(n-m)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2 - 1$, 将两个不等式相加, 得到

$$0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

在上述区间外, $y_l(n) = 0$ 是很明显的, 所以 $y_l(n)$ 是 $(N_1 + N_2 - 1)$ 点有限长序列, 等于参与卷积的两序列的点数之和减 1。例如, 如图 3-11 所示, $x_1(n)$ 为 $N_1 = 3$ 的矩形序列 (图 3-11(a)), $x_2(n)$ 为 $N_2 = 5$ 的矩形序列 (图 3-11(b)), 则它们的线性卷积 $y_l(n)$ 为 $N = N_1 + N_2 - 1 = 7$ 点的有限长序列 (图 3-11(c))。

(2) 其次, 我们来看 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的圆周卷积。先假设是点数为 L 点的圆周卷积, 再讨论 L 取何值时, 圆周卷积才能代表线性卷积。

设 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 是两序列的 L 点圆周卷积, 这就要将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都看成是 L 点的序列, 故令

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

也就是要在 $x_1(n)$ 中补上 $L - N_1$ 个零值点, 在 $x_2(n)$ 中补上 $L - N_2$ 个零值点。则

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \quad (3-82)$$

这里我们必须将任一个序列 (这里采用的是 $x_2(n)$) 变成 L 点周期延拓序列, 即

$$\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL)$$

把它代入到 $y(n)$ 式中, 并考虑到 (3-81) 式的线性卷积, 得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L \right] R_L(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n + rL) \right] R_L(n) \end{aligned} \quad (3-83)$$

所以 L 点圆周卷积 $y(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。因为 $y_l(n)$ 有 $N_1 + N_2 - 1$ 个非零值, 所以延拓的周期 L 必须满足

$$L \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (3-84)$$

这时各延拓周期才不会交叠, 而 $y(n)$ 的前 $(N_1 + N_2 - 1)$ 个值正好是 $y(n)$ 的全部非零序

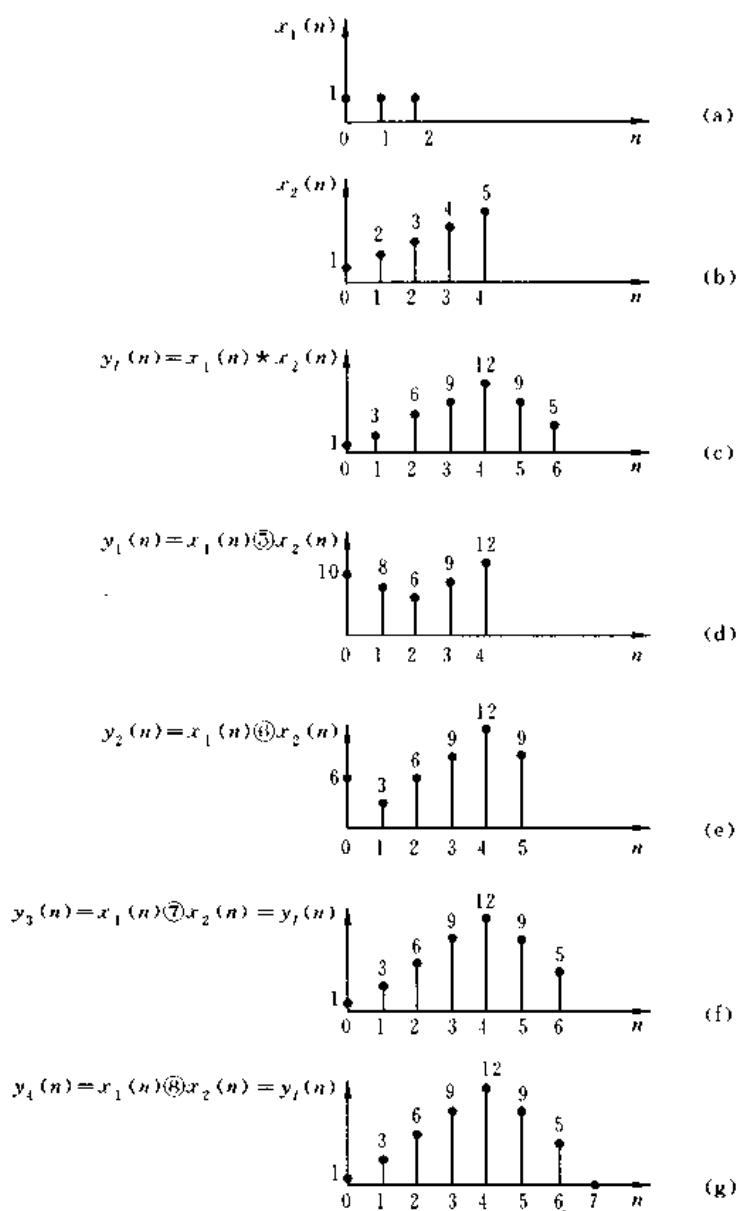


图 3-11 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

列值,也正是 $y_l(n)$,而 $y(n)$ 剩下的 $L - (N_1 + N_2 - 1)$ 个点上的序列值则是补充的零值。所以(3-84)式正是圆周卷积等于线性卷积的必要条件,满足此条件后就有

$$y(n) = y_l(n)$$

即
$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n), \quad \begin{cases} L \geq N_1 + N_2 - 1 \\ 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \end{cases} \quad (3-85)$$

结论: 若 $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 则 L 点圆周卷积能代表线性卷积。

图 3-11(d), (e), (f), (g) 正反映了(3-83)式的圆周卷积与线性卷积的关系, 在图 3-11(d)和(e)中 $L=5, L=6$ 皆小于 $N_1 + N_2 - 1 = 7$, 这时产生混叠现象, 其圆周卷积不代表线性卷积, 而在图 3-11(f)中 $L = N_1 + N_2 - 1 = 7$, 这时圆周卷积结果与线性卷积相同,

表 3-3 DFT 的性质(序列长皆为 N 点)

序 列	离散傅里叶变换(DFT)
1. $ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(k) + bX_2(k)$
2. $x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{mk} X(k)$
3. $W_N^m x(n)$	$X((k+l))_N R_N(k)$
4. $x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
5. $r_{x_1, x_2}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1^*(n)x_2((n+m))_N R_N(m)$	$X_1^*(k)X_2(k)$
6. $x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)X_2((k-l))_N R_N(k)$
7. $x^*(n)$	$X^*((N-k))_N R_N(k)$
8. $x((-n))_N R_N(n)$	$X((N-k))_N R_N(k)$
9. $x^*((-n))_N R_N(n)$	$X^*(k)$
10. $\operatorname{Re}[x(n)]$	$X_{\operatorname{Re}}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*((N-k))_N]R_N(k)$
11. $\operatorname{Im}[x(n)]$	$X_{\operatorname{Im}}(k) = \frac{1}{2j}[X(k) - X^*((N-k))_N]R_N(k)$
12. $x_{\operatorname{ep}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*((N-n))_N]R_N(n)$	$\operatorname{Re}[X(k)]$
13. $x_{\operatorname{op}}(n) = \frac{1}{2j}[x(n) - x^*((N-n))_N]R_N(n)$	$\operatorname{Im}[X(k)]$
14. $x(n)$ 为任意实序列	$X(k) = X^*((N-k))_N R_N(k)$ $\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X((N-k))_N]R_N(k)$ $\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X((N-k))_N]R_N(k)$ $ X(k) = X((N-k))_N R_N(k)$ $\arg[X(k)] = -\arg[X((N-k))_N]R_N(k)$
15. $\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$	
16. $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$	

图 3-11(g) $L=8 > N_1 + N_2 - 1$, 所得 $y(n)$ 的前 7 点序列正好代表线性卷积结果, 在第 8 点($n=7$)是零值, 没有影响。所以只要 $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 圆周卷积结果就代表线性卷积。

同样亦可用圆周相关代替线性相关, 圆周相关也是按照圆周移位的规则来定义相关函数的, 与圆周卷积不同之处在于没有“翻褶”这一步骤。如果两个序列点数分别为 N_1 和 N_2 , 若需用两序列的圆周相关来代替它们的线性相关, 同样需将这两序列补零到序列点数大于或等于 $N_1 + N_2 - 1$ 才行。

最后我们在表 3-3 中列出了 DFT 的性质, 以供参考。

3.7 抽样 z 变换——频域抽样理论

在 3.2 节中已说到, 周期序列的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$ 的值和 $\tilde{x}(n)$ 的一个周

期的 z 变换在单位圆的 N 个均分点上的抽样值相等,这就实现了频域的抽样。那么,是否任何一个序列(或说任何一个频率特性)都能用频域抽样的办法去逼近呢?其限制条件是什么?

现在我们一般性地讨论一个绝对可和的非周期序列,它的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

由于绝对可和,所以其傅里叶变换存在且连续,故 z 变换收敛域包括单位圆。如果我们对 $X(z)$ 在单位圆上的 N 个均分点抽样,就得到周期序列

$$\tilde{X}(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{-nk} \quad (3-86)$$

问题在于,这样抽样以后是否仍能恢复出原序列 $x(n)$,为此,我们来看这一周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的离散傅里叶级数的反变换,令其为 $\tilde{x}_N(n)$ 。

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

将(3-86)式代入此式可得

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{-mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(m-n)k} \right]$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } m \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \quad (3-87)$$

这说明由 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓序列,其时域周期为频域抽样点数 N 。在第一章 1.4 节中知道时域抽样造成频域的周期延拓,这里对称地又看到频域抽样同样会造成时域的周期延拓。因此

(1) 如果 $x(n)$ 不是有限长序列,则时域周期延拓后,必然造成混叠现象,就会产生误差。当 n 增加时信号衰减得越快,或频域抽样越密(即抽样点数 N 越多),则误差越小。

(2) 如果 $x(n)$ 是有限长序列,点数为 M ,则当频域抽样不够密,即当 $N < M$ 时, $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓,就会造成混叠,从 $\tilde{x}_N(n)$ 中就不能不失真地恢复出原信号 $x(n)$ 来。

(3) 对于 M 点的有限长序列,频域抽样不失真的条件是频域抽样点数 N 要大于或等于 M ,即满足

$$N \geq M \quad (3-88)$$

此时可得到

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)R_N(n) = x(n), \quad N \geq M \quad (3-89)$$

(4) 如果点数为 N (或小于 N)的有限长序列,可以利用它的 z 变换在单位圆上的 N 个均分点上的抽样值精确地表示。

既然 N 个频域抽样 $X(k)$ 能不失真地代表 N 点有限长序列, 那么这 N 个抽样值 $X(k)$ 也一定能够完全地表达整个 $X(z)$ 及频率响应 $X(e^{j\omega})$ 。讨论如下:

有限长序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

由于

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

将它代入 $X(z)$ 式子中, 得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3-90)$$

这就是用 N 个频率抽样来恢复 $X(z)$ 的插值公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3-91)$$

其中

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-92)$$

称为插值函数。令其分子为零, 得

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}r}, \quad r = 0, 1, \dots, k, \dots, N-1$$

即有 N 个零点。而令分母为零, 则有 $z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 一个极点, 它将和第 k 个零点相抵消, 因而插值函数 $\Phi_k(z)$ 只在本身抽样点 $r=k$ 处不为零, 在其他 $(N-1)$ 个抽样点 r 上 ($r=0, 1, \dots, N-1$, 但 $r \neq k$) 都是零点 (有 $(N-1)$ 个零点)。而它在 $z=0$ 处有 $(N-1)$ 阶极点, 如图 3-12 所示。

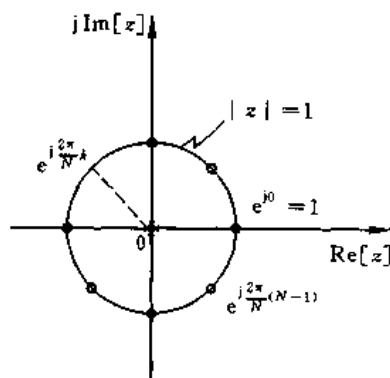


图 3-12 插值函数 $\Phi_k(z)$ 的零点、极点 ($z=0$ 处为 $N-1$ 阶极点)

现在来讨论频率响应, 即求单位圆上 $z=e^{j\omega}$ 的 z 变换。由 (3-91) 式可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega})$$

而

$$\begin{aligned}\Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{k\pi}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\end{aligned}\quad (3-93)$$

可将 $\Phi_k(e^{j\omega})$ 表示成更为方便的形式

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3-94)$$

其中

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \quad (3-95)$$

则

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3-96)$$

频域插值函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性及相位特性如图 3-13 所示。其中相位是线性相移加上一个 π 的整数倍的相移, 后一个相移是由于 $\Phi(\omega)$ 每隔 $2\pi/N$ 的整数倍相位翻转 [$\Phi(\omega)$ 由正变负或由负变正], 因而每隔 $2\pi/N$ 的整数倍相位要加上 π 。当变量 $\omega=0$ 时, $\Phi(\omega)=1$, 当 $\omega=i \frac{2\pi}{N} (i=1, 2, \dots, N-1)$ 时, $\Phi(\omega)=0$ 。因而可知, $\Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$ 满足以下关系:

$$\Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) = \begin{cases} 1, & \omega = k \frac{2\pi}{N} = \omega_k \\ 0, & \omega = i \frac{2\pi}{N} = \omega_i, i \neq k \end{cases} \quad (3-97)$$

也就是说, 函数 $\Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$ 在本抽样点 $\left(\omega_k = k \frac{2\pi}{N}\right)$ 上, $\Phi\left(\omega_k - k \frac{2\pi}{N}\right) = 1$, 而在其他抽样点 $\left(\omega_i = i \frac{2\pi}{N}, i \neq k\right)$ 上, 函数 $\Phi\left(\omega_i - k \frac{2\pi}{N}\right) = 0$ 。整个 $X(e^{j\omega})$ 就是由 N 个 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 函数分别乘上 $X(k)$ 后求和, 所以很明显, 在每个抽样点上 $X(e^{j\omega})$ 就精确地等于 $X(k)$ (因为其他点的插值函数在这一点上的值为零, 没有影响) 即

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-98)$$

请注意, 一般来说, 这里的 $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 都是复数。

各抽样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值由各抽样点的加权插值函数 $\left[X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right]$ 在所求 ω 点上的值的叠加得到, 如图 3-14 所示。从 (3-95) 式看出, 插值函数具有线性相位, 这从图 3-13 中也可看出。

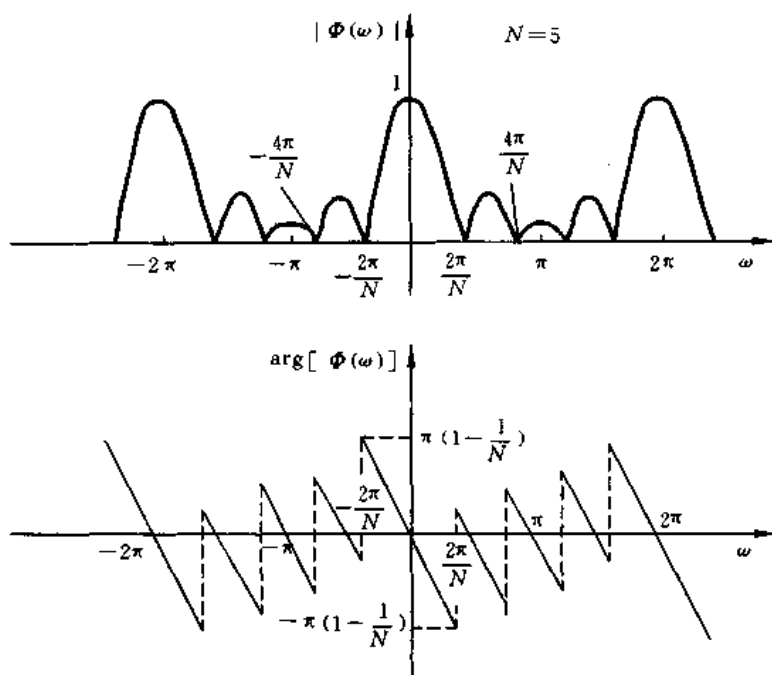


图 3-13 插值函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性与相位特性 ($N=5$)

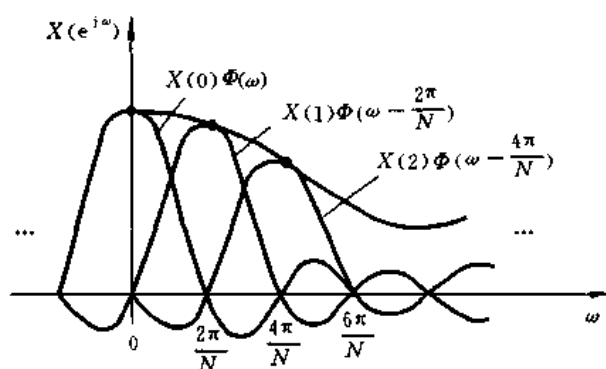


图 3-14 由内插函数求得 $X(e^{j\omega})$ 的示意图

注意,图 3-14 是假定 $X(e^{j\omega})$ 只有正负值的情况下的示意图,一般情况下 $X(e^{j\omega})$ 是复数。因而,应该有

$$|X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = |X(k)| \quad (3-99)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})]_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \arg[X(k)] \quad (3-100)$$

在第五章中,我们将会看到 $X(z)$ 的插值公式(3-90)式是有限长单位冲激响应系统的一种可能实现结构的根据。

3.8 利用 DFT 计算模拟信号的傅里叶变换(级数)对

当已知连续模拟信号的数学表达式时,信号的频谱密度可以利用解析法精确求解。

当不知道其数学表达式时,可以用数值计算法作近似分析。实际上,通过计算机利用 DFT 对信号进行分析与合成是当前主要的应用方法。

一、对连续时间非周期信号的傅里叶变换(CTFT)的 DFT 逼近

连续时间非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3-101)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3-102)$$

用 DFT 方法计算这一对变换的办法如下:

(1) 将 $x(t)$ 在 t 轴上等间隔(宽度为 T)分段,每一段用一个矩形脉冲代替,脉冲的幅度为其起始点的抽样值 $x(t)|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$,然后把所有矩形脉冲的面积相加。由于

$$\begin{aligned} t &\rightarrow nT \\ dt &\rightarrow T \quad (dt = (n+1)T - nT) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt &\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \end{aligned}$$

则得频谱密度 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$ 的近似值为

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \cdot T \quad (3-103)$$

(2) 将序列 $x(n) = x(nT)$ 截断成从 $t=0$ 开始长度为 T_0 的有限长序列,包含有 N 个抽样(即时域取 N 个样点),则(3-103)式成为

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT} \quad (3-104)$$

由于时域抽样,抽样频率为 $f_s = 1/T$,则频域产生以 f_s 为周期的周期延拓,如果频域是限带信号,则有可能不产生混叠,成为连续周期频谱序列,频域周期为 $f_s = 1/T$ (即时域的抽样频率)。

(3) 为了数值计算,在频域上也要离散化(抽样)即在频域的一个周期(f_s)中也分成 N 段,即取 N 个样点 $f_s = NF_0$ 。每个样点间的间隔为 F_0 。频域抽样,那么频域的积分式(3-102)式就变成求和式,而时域就得到原已截断的离散时间序列的周期延拓序列,其时域周期为 $T_0 = 1/F_0$ 。这时 $\Omega = k\Omega_0$

$$d\Omega = (k+1)\Omega_0 - k\Omega_0 = \Omega_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \Omega_0$$

各参量关系为

$$T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{N}{f_s} = NT$$

又
则

$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$

$$\Omega_0 T = \Omega_0 \cdot \frac{1}{f_s} = \Omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} = 2\pi \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_s} = 2\pi \cdot \frac{F_0}{f_s} = 2\pi \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{2\pi}{N} \quad (3-105)$$

这样,经过上面 1,2,3 三个步骤后,时域、频域都是离散周期的序列,推导如下:

第 1,2 两步:时域抽样、截断

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

$$x(nT) \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Omega_s} X(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega \quad (\text{在频域的一个周期内积分})$$

第 3 步:频域抽样,则得

$$X(jk\Omega_0) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)]$$

$$x(nT) = \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = F_0 \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= F_0 \cdot N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= f_s \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= f_s \cdot \text{IDFT}[X(jk\Omega_0)]$$

$$X(jk\Omega_0) = X(j\Omega) |_{\Omega=k\Omega_0} \approx T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (3-106)$$

$$x(n) = x(t) |_{t=nT} \approx \frac{1}{T} \cdot \text{IDFT}[X(jk\Omega_0)] \quad (3-107)$$

这就是从离散傅里叶变换法求连续非周期信号的傅里叶变换的抽样值的方法。

由 $X(jk\Omega_0)$ 及 $x(n)$ 的上两个近似式(3-106)式及(3-107)式求连续的 $X(j\Omega)$ 及 $x(t)$ 的方法,则可分别用上面 3.7 节中的频域抽样定理的插值公式以及前面 1.4 节中的时域抽样定理的插值公式求得。

二、对连续时间周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数的 DFS 逼近

连续时间周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数对为

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3-108)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3-109)$$

这里 T_0 为连续时间周期信号的周期。

由于满足:时域周期 \leftrightarrow 频域离散

时域连续 \leftrightarrow 频域非周期

要将连续周期信号与 DFS 联系起来,就需要

(1) 先对时域抽样 $x(n) = x(nT) = x(t) |_{t=nT}$

$$t = nT$$

$$dt = (n+1)T - nT = T$$

$$\int_0^{T_0} dt \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} T$$

设一个周期内的样点数为 N , 前(3-108)式变成

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-110)$$

在 T_0 (一个周期) 时间段内抽样间隔为 T , 共有 $\frac{T_0}{T} = N$ 个抽样点。

(2) 将频域离散序列加以截断, 使它成为有限长序列, 如果这个截断长度正好等于一个周期(时域抽样造成的频域周期延拓的一个周期), 则(3-109)式变成(既有时域抽样, 又有频域截断)

$$\begin{aligned} x(nT) &\approx \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned} \quad (3-111)$$

按照 DFT(DFS) 的定义, 由(3-110)式及(3-111)式可得

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{N} \cdot \text{DFS}[x(n)] \quad (3-112)$$

$$x(nT) = x(t) |_{t=nT} \approx N \cdot \text{IDFS}[X(jk\Omega_0)] \quad (3-113)$$

这就是用 DFS(DFT) 来逼近连续时间周期信号傅里叶级数对的公式。

三、利用 DFT 对非周期连续时间信号傅里叶变换对逼近的全过程图解

如图 3-15 所示。

四、利用 DFT 计算连续时间信号(模拟信号)时可能出现的几个问题

1. 频率响应的混叠失真及参数的选择

若信号最高频率为 f_h , 按抽样定理, 抽样频率应满足(抽样之前用前置(预)滤波器, 即防混叠滤波器, 将高于 f_h 频率的信号分量加以滤除)

$$f_s > 2f_h$$

也就是抽样间隔为 T 满足

$$T = \frac{1}{f_s} < \frac{1}{2f_h}$$

一般应取

$$f_s = (2.5 \sim 3.0) f_h \quad (3-114)$$

如果不满足 $f_s > 2f_h$ 的要求, 前面已说过, 就会产生频率响应的周期延拓分量互相重叠现象, 也就是产生频率响应的混叠失真。

对于 DFT 来说, 频率函数也要抽样, 变成离散的序列, 其抽样间隔为 F_0 , 这就是我们能得到的频率分辨率, 由它可引出时间函数的周期, 也就是所取的记录长度 T_0 为

$$T_0 = \frac{1}{F_0} \quad (3-115)$$

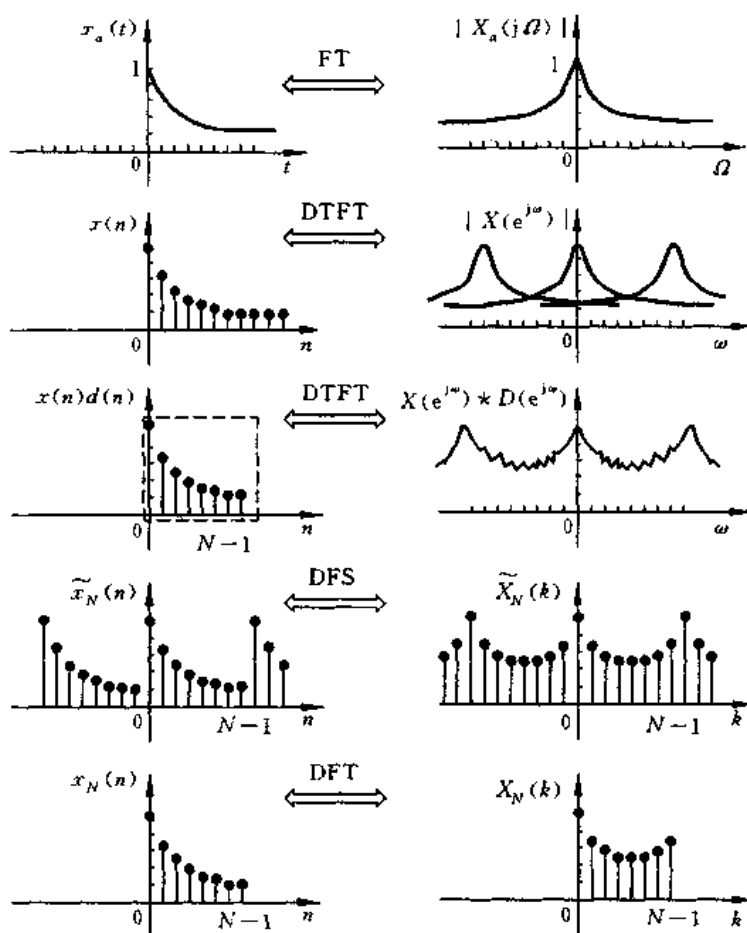
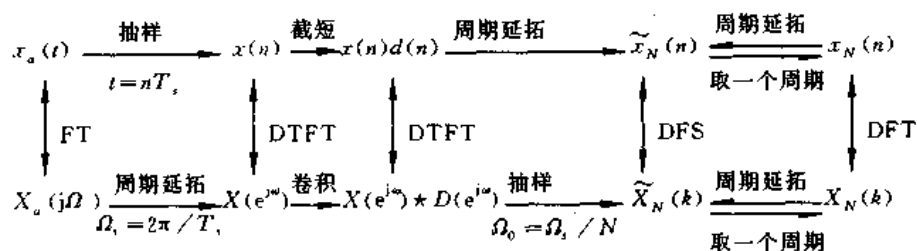


图 3-15 利用 DFT 对 CTFT(连续时间傅里叶变换)逼近的全过程

从以上 T 和 T_0 两个公式来看,信号的最高频率分量 f_h 与频率分辨率 F_0 间有着矛盾关系,要想 f_h 增加,则时域抽样间隔 T 就一定减小 ($T = \frac{1}{f_s} < \frac{1}{2f_h}$),而 f_s (抽样频率)就增加,由于抽样点数满足

$$\frac{f_s}{F_0} = \frac{T_0}{T} = N \quad (3-116)$$

则此时 f_h 增加,若是 N 固定的情况下,必然要 F_0 增加,即分辨力下降。

反之,要提高分辨力(减小 F_0),就要增加 T_0 ,当 N 给定时,必然导致 T 的增加 (f_s 减小)。要不产生混叠失真,则必然会减小高频容量(信号的最高频率分量) f_h 。

要想兼顾高频容量 f_h 与频率分辨率 F_0 , 即一个性能提高而另一个性能不变(或也得提高)的惟一办法就是增加记录长度的点数 N , 即要满足

$$N = \frac{f_h}{F_0} > \frac{2f_h}{F_0} \quad (3-117)$$

这个公式是未采用任何特殊数据处理(例如加窗处理)的情况下, 为实现基本 DFT 算法所必须满足的最低条件。如果加窗处理, 相当于时域相乘, 则频域周期卷积, 必然加宽频谱分量, 频率分辨率就可能变坏, 为了保证频率分辨率不变, 则须增加记录长度, 也就是增加数据长度 T_0 。

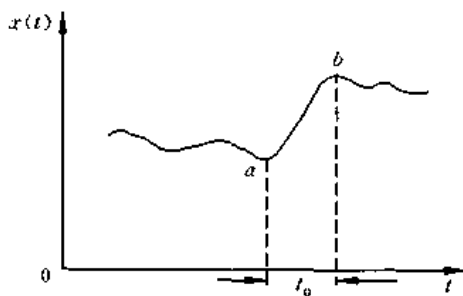


图 3-16 估算信号最高频率 f_h

若不知道信号的最高频率 f_h 时, 又将如何处理呢? 例如人们只观测或记录下来某一段时间的波形或数据, 如图 3-16 所示, 应如何确定 f_h 呢? 根据时域变化越快, 则高频分量越丰富这一点, 我们可令变化速度最快的两相邻的峰谷点之间间隔为半个周期(例如 a, b 两点), 即

$$t_0 = \frac{T_h}{2}$$

而

$$T_h = \frac{1}{f_h}$$

从而

$$f_h = \frac{1}{2t_0}$$

知道 f_h 后就能确定抽样频率 $f_s > 2f_h$ 。

若已知信号频谱为无限宽, 则可选取占信号总能量 98% 左右的频带宽度 ($|f| < f_h$ 范围内的能量) 的 f_h 作为信号的最高频率, 从而可进一步确定抽样频率 f_s 。

【例 3-2】有一频谱分析用的 FFT 处理器, 其抽样点数必须是 2 的整数幂, 假定没有采用任何特殊的数据处理措施, 已给条件为

- ① 频率分辨率 $\leq 10\text{Hz}$
- ② 信号最高频率 $\leq 4\text{kHz}$

试确定以下参量:

- a. 最小记录长度 T_0 ;
- b. 抽样点间的最大时间间隔 T (即最小抽样频率);
- c. 在一个记录中最少点数 N 。

解 a. 由分辨率的要求确定最小记录长度 T_0

$$\frac{1}{F_0} = \frac{1}{10} = 0.1(\text{s})$$

所以记录长度为

$$T_0 \geq \frac{1}{F_0} = 0.1(\text{s})$$

b. 从信号的最高频率确定最大可能的抽样间隔 T (即最小抽样频率 $f_s = 1/T$), 按抽样定理

$$f_s > 2f_h$$

即

$$T < \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2 \times 4 \times 10^3} = 0.125 \times 10^{-3}(\text{s})$$

c. 最小记录点数 N 应满足

$$N > \frac{2f_h}{F_0} = \frac{2 \times 4 \times 10^3}{10} = 800$$

取

$$N = 2^m = 2^{10} = 1024 > 800$$

2. 频谱泄漏

实际情况下, 往往要把观测的信号限制在一定长的时间之内, 设原来延伸到无限处的信号为 $x_1(n)$, 其频谱为 $X_1(e^{j\omega})$ (频谱只画出其一个周期部分) 所截取的一个时间段的信号为 $x_2(n)$, 其频谱为 $X_2(e^{j\omega})$ (频谱也只表示了一个周期部分), 如图 3-17 所示。

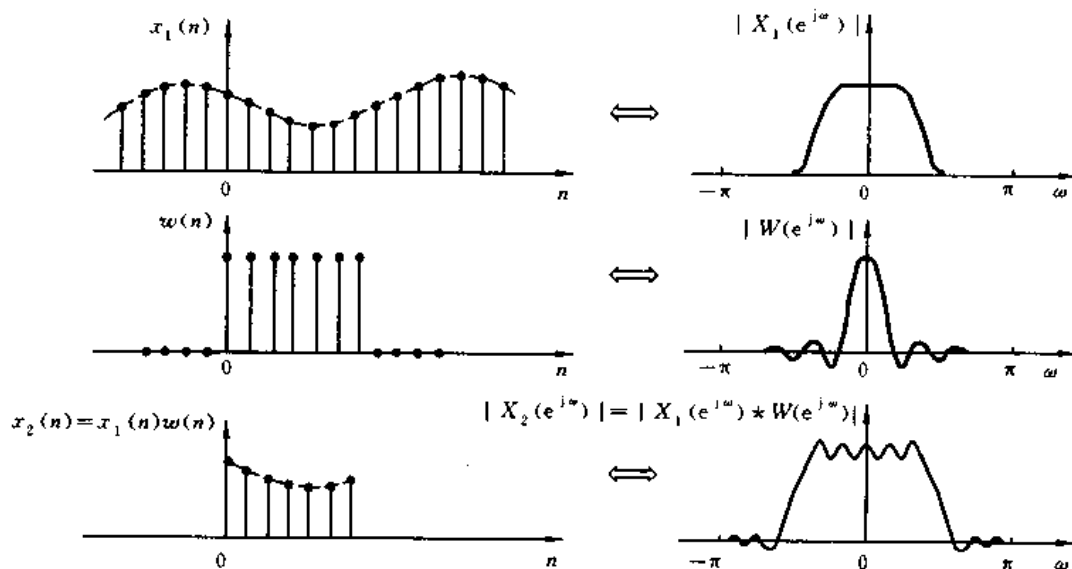


图 3-17 信号截断时产生的频谱泄漏现象

这里, 取有限个数据, 就相当于在时域乘一个矩形窗函数——数据突然截断, 窗内数据并不改变, 时域相乘 ($x_1(n)$ 与矩形窗相乘得到 $x_2(n)$ 波形), 则在频域中相当于参与相乘的两个波形 (所研究的波形 $x_1(n)$ 及矩形窗波形 $w(n)$) 各自的频谱的周期卷积过程。

卷积的结果,造成所得到的频谱 $X_2(e^{j\omega})$ 与原来的频谱 $X_1(e^{j\omega})$ 不相同,有失真,这种失真最主要的是造成频谱的“扩散”(拖尾、变宽)这就是所谓“频谱的泄漏”。

这可做如下解释:因为如果窗谱是 $\delta(\omega)$ 函数(冲激、抽样),那么时窗宽应为无穷宽的均匀函数,实际上,就等于没有乘窗函数,则卷积结果仍得到 $X_1(e^{j\omega})$ 。当窗谱有一定宽度,而不是 $\delta(\omega)$ 的情况下,卷积结果当然造成频谱展宽的泄漏现象。

应该说明,泄漏也会造成混叠,因为泄漏将会导致频谱的扩展,从而使最高频率有可能超过折叠频率($f_s/2$),造成频率响应的混叠失真。

减小泄漏的方法,首先是取更长的数据,也就是窗宽加宽,当然数据太长,必然使运算存储量都增加,其次数据不要突然截断,也就是不要加矩形窗,而是要缓慢截断,即加各种缓变的窗(例如:三角形窗、升余弦窗等),使得窗谱的旁瓣能量更小,卷积后造成的泄漏减小,这个问题在 FIR 滤波器设计一章(第七章)中将会讨论到。

3. 栅栏效应

因为 DFT 计算频谱只限制在离散点上的频谱,也就是只限制为基频 F_0 的整数倍处的谱,而不是连续频率函数,这就像通过一个“栅栏”观看一个景像一样,只能在离散点的地方看到真实景像,把这种现象称为“栅栏效应”。如图 3-18 所示。

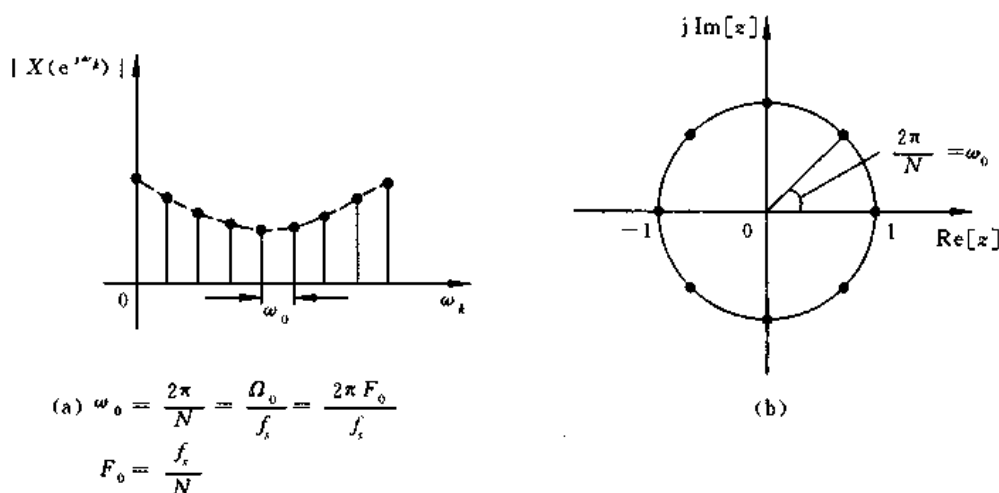


图 3-18 栅栏效应

减小栅栏效应的一个方法就是要使频域抽样更密,即增加频域抽样点数 N ,在不改变时域数据的情况下,必然是在时域数据末端填加一些零值点,使一个周期内的点数增加,但并不改变原有的记录数据。频域抽样为 $\frac{2\pi}{N}k$, N 增加,必然使样点间距离更近(单位圆上样点更多),谱线更密,谱线变密后原来看不到的谱分量就有可能看到了。

4. 频率分辨率

一般来说,信号长度 T_0 越长,即 N 越大,则分辨率越好,但是这个长度 T_0 是指真正的信号长度,抽样点数 N 也是指这个长度上的抽样点数,而不是补零后的长度或抽样点数。已经知道

$$F_0 = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_0}$$

T_0 是信号长度(真正信号的长度),所以说频率分辨力与信号实际长度成反比,信号越长(T_0 越大),其分辨力越高(F_0 越小)。

如果原数据长度 T_{01} , 抽样点数 N_1 , 补零后的数据长度 T_{02} , 抽样点数 N_2 , 则

$$F_{01} = \frac{f_s}{N_1} = \frac{1}{T_{01}}$$

$$F_{02} = \frac{f_s}{N_2} = \frac{1}{T_{02}}$$

因为 $N_2 > N_1$, 故 $F_{02} < F_{01}$, 故有人认为补零后, 频率分辨力提高了, 这是错误的。道理是补零不能增加数据的有效长度, 上例中实际数据的有效长度仍为 T_{01} (有效抽样点数为 N_1), 因而补零是不能提高频率分辨力的。

补零的好处是① 上面已说到使 $X(e^{j\omega})$ 的抽样更密, 即对 $X(k)$ 取中间的插值, 可克服栅栏效应; ② 使 N 为 2 的整数幂值, 便于 FFT 计算。

3.9 序列的抽取与插值

在前面, 我们都是把抽样频率 f_s 看作固定值, 即系统中采用一个固定的抽样频率。但是, 有时会遇到抽样频率的变换问题, 使系统工作在“多抽样率”情况下。例如, 多种媒体的传输、语言、视频、数据等, 它们的频率很不相同, 抽样率自然不同, 必须实行抽样率的转换; 又如, 为了减少抽样率太高造成的数据的冗余, 有时需要降低抽样率; 再如, 两数字系统的时钟频率不同, 信号要在此两系统中传输时, 为了便于信号的处理、编码、传输和存储, 则要求根据时钟频率对信号的抽样率加以转换, 等等。

上面的各种应用都要求转换抽样率, 或者要求系统工作在多抽样率状态, 经过人们不断地研究, “多抽样率数字信号处理”的重要性已逐渐显现出来, 使它成为数字信号处理的一个重要内容。

实现抽样率的转换的一种办法, 首先把离散时间信号(序列) $x(n)$ 经过 D/A 变换器变成模拟信号 $x(t)$, 再经 A/D 变换器对 $x(t)$ 以另一种抽样率抽样。但是, 经过 D/A 和 A/D 变换器都会产生量化误差, 影响精度, 因而我们感兴趣的是另一种直接在数字域对抽样信号 $x(n)$ 作抽样频率的变换, 以得到新的抽样信号。

减少抽样率的过程称为信号的“抽取”, 也称为“抽样率压缩”; 增加抽样率的过程称为信号的“插值”, 亦称为“抽样率扩张”。二者就是我们前面说过的信号时间尺度变换。抽取和插值有时是整数倍的, 有时是有理分数倍的。抽取和插值是多抽样率数字信号处理的基本环节, 应该对它们有清楚正确的理解。

一、序列的抽取

当信号的抽样数据量太大时, 可以在每 D 个抽样中取出一个, 或说每隔 $D-1$ 个抽样取出一个, 以便减小数据量, D 是整数, 称为抽样因子, 这样的抽取, 称为整数倍抽取。例如模拟信号为 $x_a(t)$, 序列为 $x(n)$, 其抽样时间间隔为 T_1 , 抽样频率为 $f_s = \frac{1}{T_1}$, 进行整数

倍(D)抽取后的序列是 $x_d(n)$, 其抽样时间间隔为 T_2 , 抽样频率为 f_{s2} , 由于是 D 个抽样取一个, 所以有

$$T_2 = DT_1 \quad f_{s2} = \frac{f_{s1}}{D} \quad (3-118)$$

$x_a(t)$, $x(n)$ 及 $x_d(n)$ 分别表示在图 3-19(a), (c), (e) 上。

用连续信号抽样的概念来直观地讨论抽取过程对频域所产生的影响, 如果令序列 $x(n)$, $x_d(n)$ 所对应的模拟信号为 $x_a(t)$, 它们各自满足以下的傅里叶变换关系:

$$x_a(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega)$$

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x_d(n) \leftrightarrow X_d(e^{j\omega})$$

则可利用前面序列的傅里叶变换与连续信号傅里叶变换的关系式即(2-55)式知

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega T_1}) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T_1}k) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_{s1}) \quad (3-119)$$

$$\begin{aligned} X_d(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega T_2}) = \frac{1}{T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T_2}k) = \frac{1}{T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_{s2}) \\ &= \frac{1}{T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{DT_1}k) \\ &= \frac{1}{D} \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{k}{D}\Omega_{s1}) \end{aligned} \quad (3-120)$$

或者表示为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T_1}) \quad (3-121)$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T_2}) \quad (3-122)$$

图 3-19 表示了 $x_a(t)$, $x(n)$ 和 $x_d(n)$ 以及它们的频谱关系包括用数字频率 $\omega = \Omega T = \Omega/f_s$ 表示的频谱关系。

这一抽取关系可用图 3-20 的抽取器及其框图表示法表示。其中 $\downarrow D$ 表示抽样率降低为原来的 $1/D$, 也就是表示抽取器。从图 3-19(f) 看出, 时域抽取得愈大, 即 D 愈大, 或抽样率愈低, 则频域周期延拓的间隔愈近, 因而有可能产生频率响应的混叠失真, 所以对 $x(n)$ 不能随意抽取, 只有在抽取之后的抽样率仍满足抽样定理要求时, 才不会产生混叠失真, 因而才能恢复出原来的信号, 否则必须采取另外的措施, 例如再加上防混叠的滤波器, 也就是说, 把序列 $x(n)$ 先通过数字低通滤波 $H(e^{j\omega})$, 使信号的频带限制在 $\frac{\Omega_{s2}}{2}$ 以下, 得到 $Y(e^{j\omega})$, 然后再进行抽取得到 $X_d(e^{j\omega})$, 见图 3-21 所示, 此处 $D=3$ 。

序列域的直接抽取——频谱间的关系

为了分析方便, 我们先将 $x(n)$ 序列进行脉冲抽样得到 $x_p(n)$, 然后去掉零值点后得到所需抽取序列 $x_d(n)$, 如图 3-22 所示。

从 $x(n)$ 到 $x_p(n)$ 是序列的脉冲串抽样(与连续时间信号的抽样相对应), 为了研究方便起见, 让我们先来讨论序列的脉冲串抽样问题。也就是说, 可以把 $x_p(n)$ 看成 $x(n)$ 与

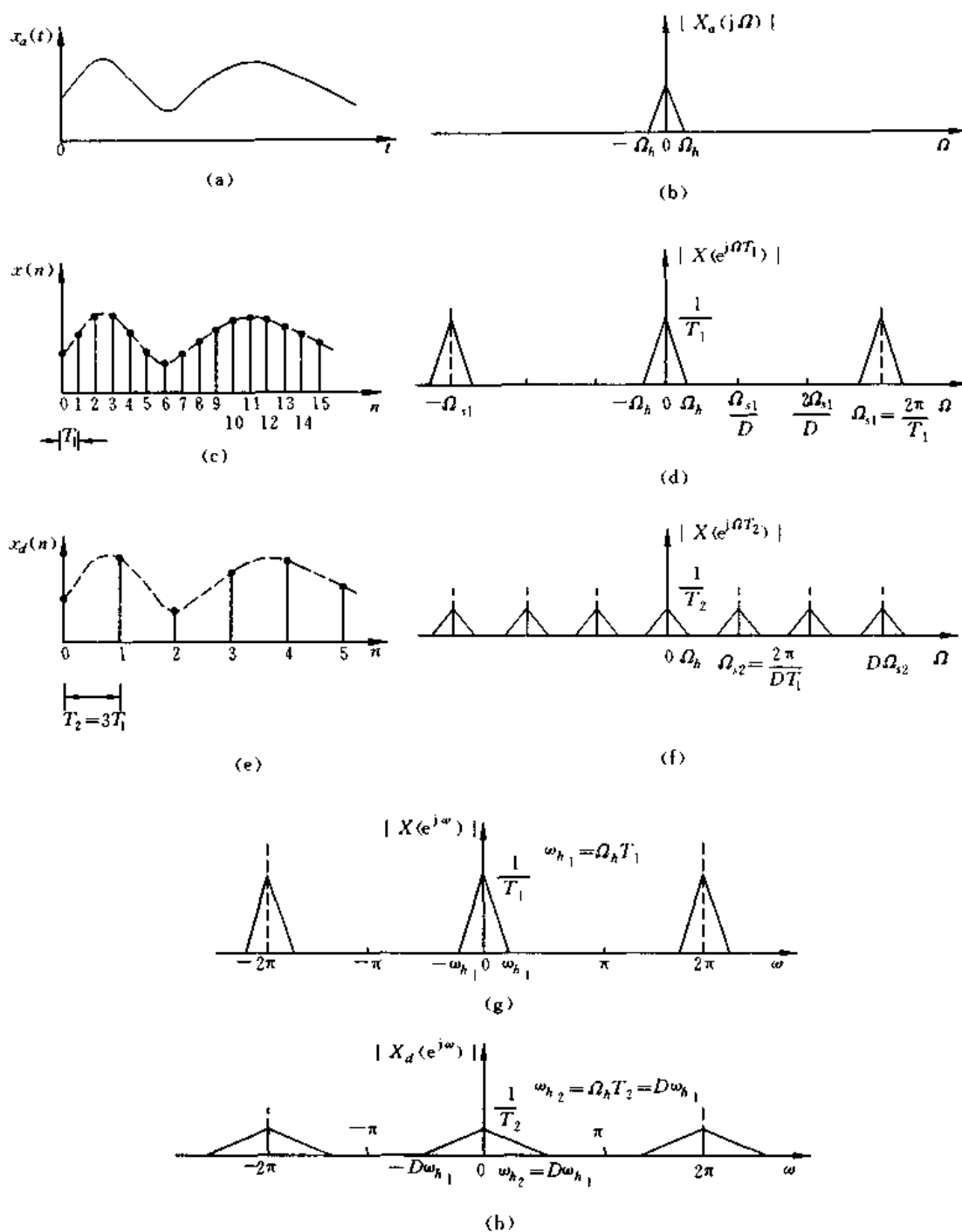


图 3-19 从模拟信号抽样的角度看序列的抽取

- (a) 模拟信号 $x_a(t)$; (b) $x_a(t)$ 的频谱; (c) $x(n) = x_a(t)|_{t=nT_1}$; (d) $x(n)$ 的频谱 $|X(e^{j\Omega T_1})|$;
 (e) $x(n)$ 的抽取序列 $x_d(n)$ ($D = \frac{T_2}{T_1} = 3$); (f) $x_d(n)$ 的频谱 $|X(e^{j\Omega T_2})|$;
 (g) 以数字频率 ω 为变量表示的 $x(n)$ 的频谱 $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{j\Omega T_1})|_{\Omega T_1 = \omega}$;
 (h) 以数字频率 ω 为变量表示的 $x_d(n)$ 的频谱 $|X_d(e^{j\omega})| = |X_d(e^{j\Omega T_2})|_{\Omega T_2 = \omega}$

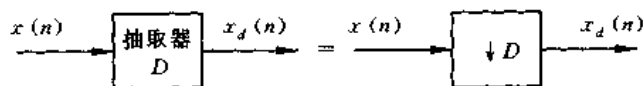


图 3-20 抽取器及其框图表示

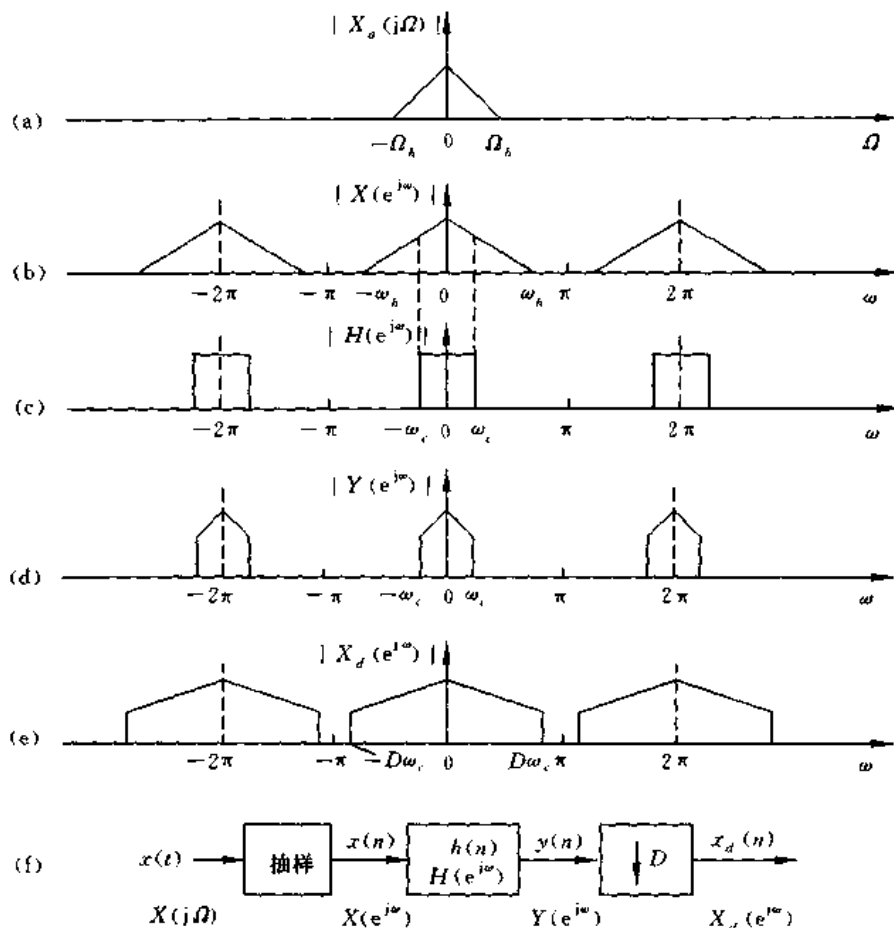


图 3-21 对序列抽取前先作低通限带滤波再进行抽取,以避免产生频率响应的混叠失真
(抽取值 $D=3$)

- (a) 原模拟信号频谱 $|X(j\Omega)|$; (b) 以某一满足抽样定理的频率抽样后信号的频谱 $|X(e^{j\omega})|$;
(c) 为了抽取 ($D=3$) 所用压缩信号频带的滤波器的频率特性 $|H(e^{j\omega})|$;
(d) 经压缩频带后的序列频谱 $|Y(e^{j\omega})|$;
(e) 以 $D=3$ 对 $y(n)$ 抽取后序列的频谱 $|X_d(e^{j\omega})|$; (f) 过程的框图

一个脉冲串 $p(n)$ 的相乘, 这个脉冲串可表示为

$$p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kD) \quad (3-123)$$

也就是每 D 个抽样中取一个抽样, 这一脉冲串抽样过程可用图 3-23 表示。

实际上, 对 $x(n)$ 抽样得到的新序列 $x_p(n)$ 在抽样周期 D 的整数倍点上就等于原来的序列 $x(n)$, 而在抽样点之间都是零, 即

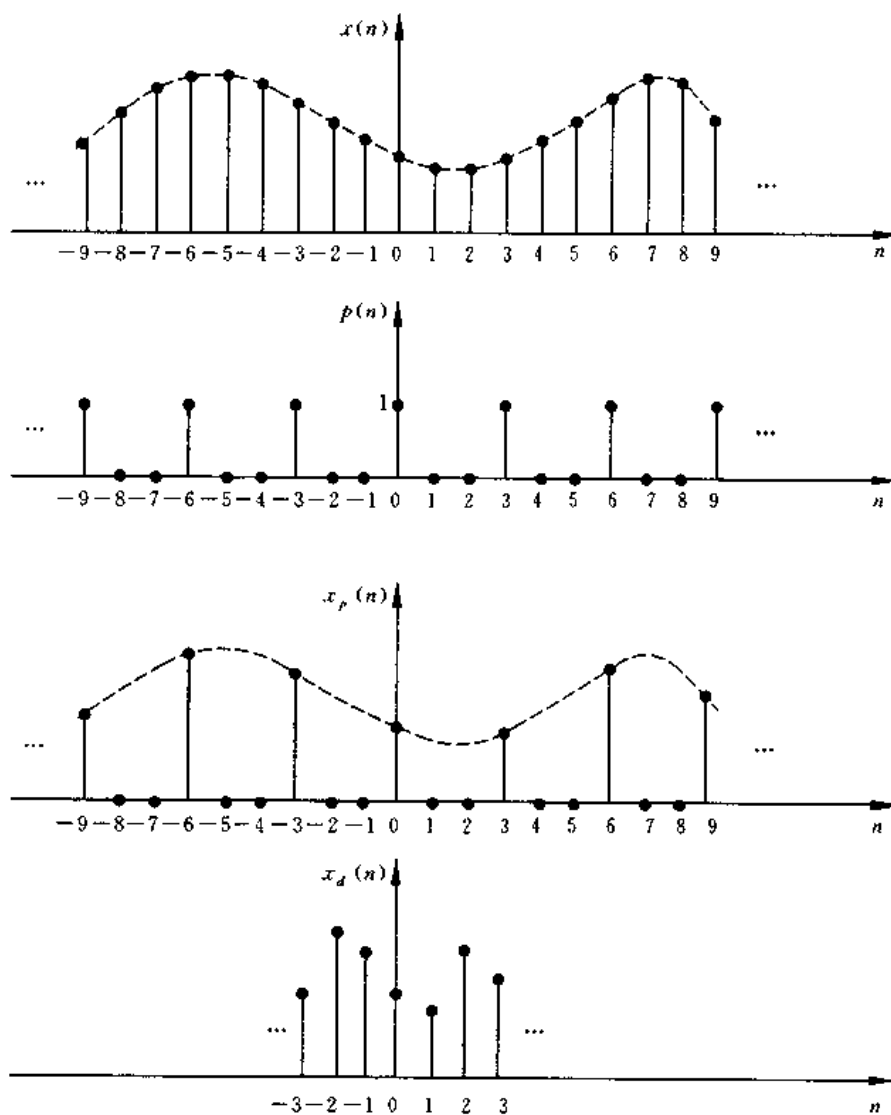


图 3-22 序列 $x(n)$ 、抽样序列 $p(n)$ 、已抽样序列 $x_p(n)$ 以及抽取序列 $x_d(n)$ ($D=3$)

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & n = kD, k \text{ 为整数}, k = 1, 2, \dots (D \text{ 亦为整数}) \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (3-124)$$

抽样过程在时域上就是相乘,即

$$x_p(n) = x(n) \cdot p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kD) \delta(n - kD) \quad (3-125)$$

那么,在频域就是卷积关系为

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3-126)$$

我们来求周期性冲激序列 $p(n)$ 的傅里叶变换 $P(e^{j\omega})$, 为此我们先来看周期序列 $p(n)$ 的离散傅里叶级数的系数 $P(k)$, 由于

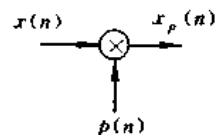


图 3-23 序列的抽样

$$p(n) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} P(k) e^{j(\frac{2\pi}{D})kn} \quad (3-127)$$

$$P(k) = \sum_{n=0}^{D-1} p(n) e^{-j(\frac{2\pi}{D})kn}$$

将(3-123)式代入可得

$$\begin{aligned} P(k) &= \sum_{n=0}^{D-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kD) e^{-j(\frac{2\pi}{D})kn} \\ &= \sum_{n=0}^{D-1} \delta(n) e^{-j(\frac{2\pi}{D})kn} \end{aligned} \quad (3-128)$$

在 $0 \leq n \leq D-1$ 范围内只有 $\delta(n)$ 存在, 故得

$$P(k) = 1$$

现在来研究(3-127)式的 $p(n)$ 的傅里叶变换 $P(e^{j\omega})$, 如果把周期序列表示成频域中的冲激, 那么周期序列 $p(n)$ 也可以有傅里叶变换表达式, 可以证明 $p(n)$ 的傅里叶变换 $P(e^{j\omega})$, 可以表示为(代入 $P(k)=1$)

$$P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{D} \sum_{k=0}^{N-1} P(k) \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{D}\right) = \frac{2\pi}{D} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (3-129)$$

因此, 一个周期序列的傅里叶变换 $P(e^{j\omega})$ 可以直接从它的离散傅里叶级数系数 $P(k)$ 得到。式中, $\omega_s = 2\pi/D$ 是抽样频率, 这样将上式代入(3-126)式中可得抽样后序列 $x_p(n)$ 的频谱 $X_p(e^{j\omega})$ 为

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega - k\omega_s)}) \quad (3-130)$$

现在来分析 $X(e^{j\omega})$, $X_p(e^{j\omega})$ 和 $X_d(e^{j\omega})$ 的关系, 由图 3-22 知

$$x_d(n) = x_p(Dn)$$

又因为 $x_p(n)$ 和 $x(n)$ 在 D 的整数倍上的值都是相等的, 可等效为

$$x_d(n) = x(Dn) \quad (3-131)$$

$x(n)$, $x_p(n)$ 和 $x_d(n)$ 之间的关系如图 3-22 所示。

为了确定抽取后在频域的效果, 我们希望求得 $x_d(n)$ 的傅里叶变换 $X_d(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系, 为此, $X_d(e^{j\omega})$ 可表示为

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p(Dk) e^{-j\omega k} \quad (3-132)$$

令 $n=Dk$ 或 $k=n/D$, 就可得

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n \text{ 为 } D \text{ 的整数倍}} x_p(n) e^{-j\omega \frac{n}{D}} \quad (3-133)$$

当 n 不为 D 的整数倍时 $x_p(n)=0$, 所以上式也可写成

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n) e^{-j\omega \frac{n}{D}} = X_p(e^{j\frac{\omega}{D}})$$

也就是说

$$X_d(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\frac{\omega}{D}}) \quad (3-134)$$

这一关系如图 3-24 所示, 从图中看出, 已抽样序列 $x_p(n)$ 和抽取序列 $x_d(n)$ 的频谱差别只

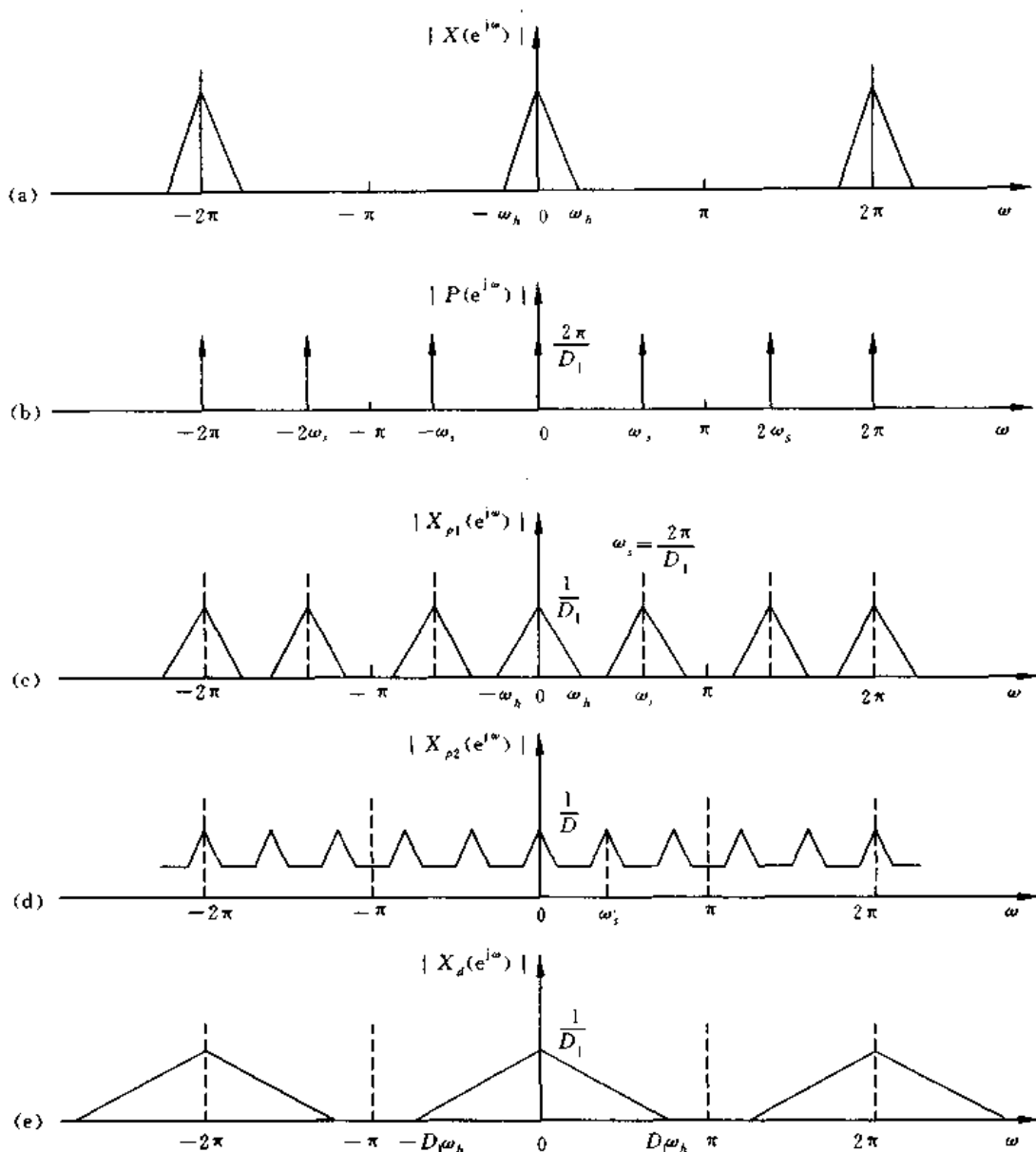


图 3-24 一个序列的经冲激串抽样后以及抽取后的频域效果

- (a) 原序列的频谱; (b) 抽样序列的频谱; (c) 当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时已抽样序列的频谱;
 (d) 当 $\omega_s < 2\omega_h$ 时已抽样序列的频谱, 这时发生了频率响应的混叠失真;
 (e) 抽取序列的无混叠失真的频谱

在频率尺度上不同。若原来的频谱 $X(e^{j\omega})$ 已被限带, 以至于在 $X_p(e^{j\omega})$ 中不存在频率响应的混叠失真, 如图 3-24(c) 所示, 则抽取的效果就是使原来序列的频谱扩展到一个较宽的数字频带上, 从而我们看出, 为了避免在抽取过程中发生频率响应的混叠失真, 原序列 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 就不能占满整个频带 $(0 \sim \pi)$, 换言之, 如果序列能够被抽取而又不产生频率响应的混叠失真, 其原来的连续时间信号是被过抽样的了, 从而使原抽样率可以减小而不发生混叠, 因此抽取的过程就称为减抽样。

二、序列的插值

如果将 $x(n)$ 的抽样频率 f_s 增加 I 倍,即为 I 倍插值结果。最简单的整数倍插值是在已知的相邻抽样点之间插入 $(I-1)$ 个抽样值,但是由于这 $(I-1)$ 个抽样值并不是已知的,所以这个问题比整数倍抽取看起来要复杂一些。理论上说,和抽取时一样,我们可以将序列 $x(n) = x_a(nT_1)$ 进行 D/A 变换得到原来的连续时间信号 $x_a(t)$,然后再对 $x_a(t)$ 作较高抽样率的抽样得到 $x_I(n) = x_a(nT_2)$,这里

$$T_1 = IT_2 \quad (3-135)$$

式中 I 是大于 1 的整数,称为插值因子。但是这样做是不经济的,因此,我们都是在离散时域进行插值,讨论如下:

整数倍(I 倍)插值的方法 先在已知抽样序列 $x(n)$ 的相邻两抽样点之间等间隔地插入 $(I-1)$ 个零值点,然后进行数字低通滤波,即可求得 I 倍插值的结果,其框图如图 3-25 所示,图中 $\uparrow I$ 表示在 $x(n)$ 的相邻抽样点间补 $(I-1)$ 个零值点,也就是它表示零值插值,称为零值插值器, $x(n)$ 经零值插值器后得到 $x_p(n)$,再经数字低通滤波后得到 I 倍插值的结果 $x_I(n)$ 。

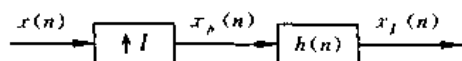


图 3-25 插值系统的框图

实际上这一插值过程可以看成图 3-22 所示抽取过程的逆过程,其频谱关系则可看成图 3-24 的逆过程,这一过程,我们将它综合在图 3-26 上。

实际上,我们有

$$x_p(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{I}\right), & n = 0, \pm I, \pm 2I \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (3-136)$$

在图 3-26 中,信号的插值是靠先插入 $(I-1)$ 个零值点得到 $x_p(n)$,然后将 $x_p(n)$ 通过数字低通滤波器,通过此低通滤波器后,这些零值点将不再是零,从而得到插值后的输出 $x_I(n)$ 。

三、比值为有理数的抽样率转换

给定信号 $x(n)$,若希望将抽样率转变为 $1/D$ 倍,例如原来的抽样率为 1kHz 的序列,要变成抽样率为 1.4kHz 的序列,我们可以先将序列经过 $I=7$ 倍的插值转换为抽样率为 7kHz 的序列,然后再进行 $D=5$ 倍的抽取,得到抽样率为 1.4kHz 的序列。为此一般我们是先做 I 倍的插值,再做 D 倍的抽样来实现抽样率的有理数转换,自然也可以先抽取、后插值,但是,一般来说先抽取使 $x(n)$ 的数据点减少,会产生信息的丢失,并且可能产生频率响应的混叠失真,因而合理的办法,是先对信号插值,然后再抽取。如图 3-27 所示。

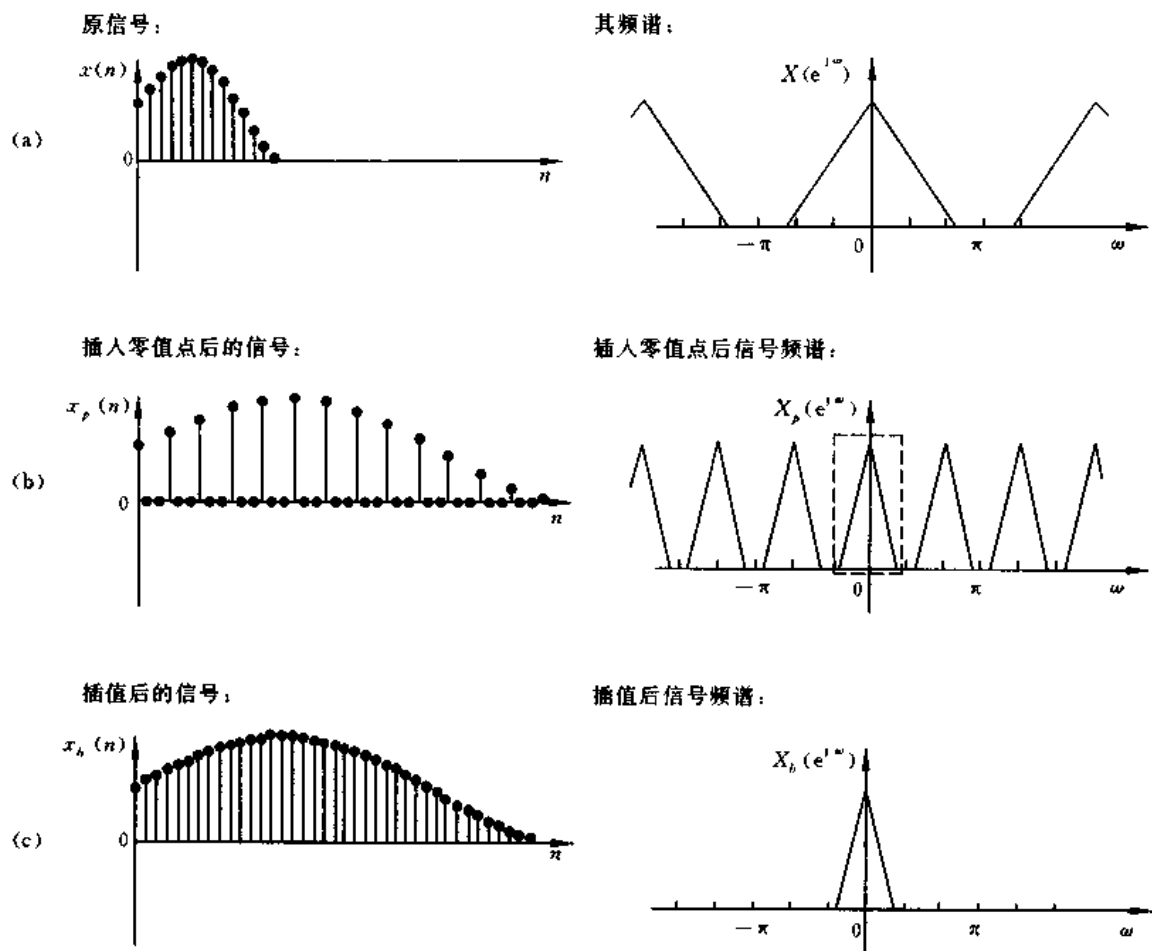


图 3-26 插值过程

- (a) 原信号 $x(n)$ 及其频谱 $X(e^{j\omega})$; (b) 插入零值点后的信号 $x_p(n)$ 及其频谱 $X_p(e^{j\omega})$;
(c) 插值后的信号 $x_i(n)$ 及其频谱 $X_i(e^{j\omega})$

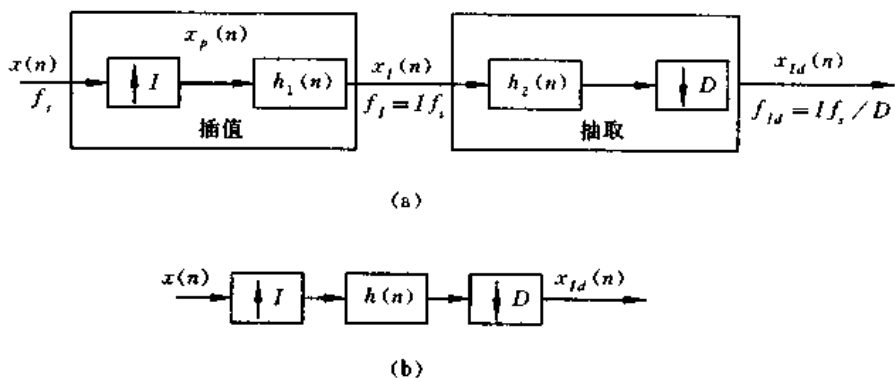


图 3-27 插值和抽取的级联实现

- (a) 使用两个低通滤波器; (b) 使用一个低通滤波器

图 3-27(a) 中插值和抽取级联工作, $h_1(n)$ 是插值所必须的低通滤波器, $h_2(n)$ 是抽取前级联的防混叠低通滤波器, 它们所处理的抽样信号的抽样率都是 If_s , 因此可将它们合

并成一个滤波器 $h(n)$, 如图 3-27(b) 所示, 而 $h(n)$ 的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I, & 0 \leq |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}\right) \\ 0, & \text{其他 } \omega \end{cases} \quad (3-137)$$

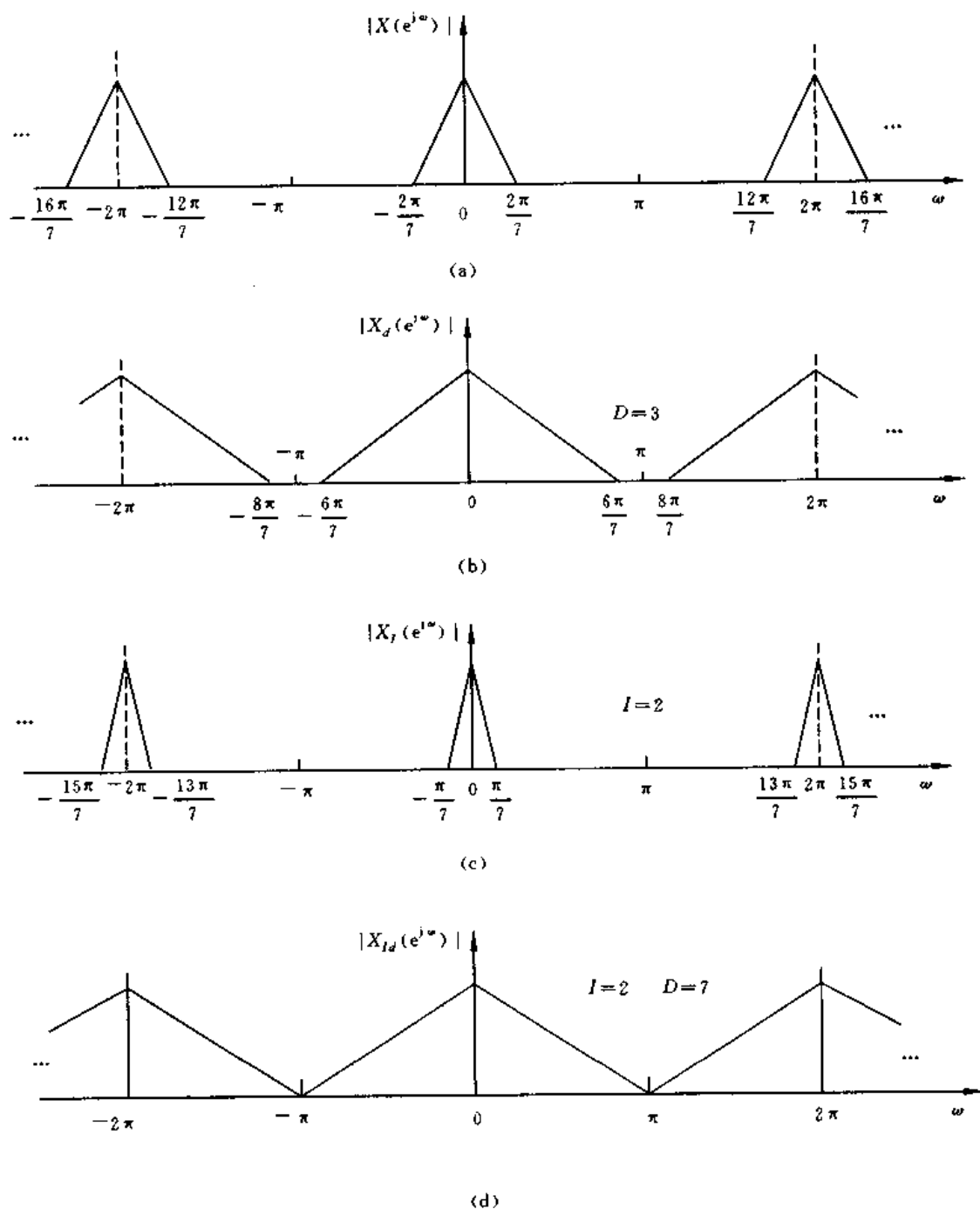


图 3-28 例 3-3 的有关频谱

- (a) $x(n)$ 的频谱; (b) $x(n)$ 抽取 ($D=3$) 后的频谱;
 (c) $x(n)$ 插值 ($I=2$) 后的频谱; (d) $x(n)$ 插值 ($I=2$) 后再抽取 ($D=7$) 后的频谱

这里有

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s I} \quad (3-138)$$

可以证明,无论是抽取或是插值,其输入到输出的变换都相当于经过一个线性移变(时变)系统。

下面我们用一个例子来说明比值为有理数(I/D)的抽样率的转换,也就是如何将插值与抽取结合起来,以便对序列进行抽样率变化而又不会带来混叠失真。当然,抽样率减小到使序列频谱在一个周期内的非零部分已经扩展到 $-\pi$ 到 π 的整个频带内,就不能再减小抽样率了。

[例 3-3] 某序列 $x(n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 如图 3-28(a) 所示, 从频谱图看, 这个序列只采用整数抽取(即脉冲抽样)而又不产生混叠的最低抽样数字频率为 $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ($\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = \frac{2\pi}{3}$, 即 $f = \frac{f_s}{3}$), 也就是每 3 个抽样值抽取一次。这样就得到序列 $x_d(n]$ (注意, 抽取后序列抽取值之间的零值已被摒弃), 它的频谱为图 3-28(b) 所示, 很显然, 这时不产生混叠, 然而在 $6\pi/7 \leq |\omega| \leq \pi$ 这段频带内频谱还是零, 仍有进一步减抽样的余地, 因而我们只能改用有理数方式对 $x(n]$ 进行抽样率的转换, 以实现进一步减抽样的目的。由图 3-28(a) 所示, 我们可以将频率尺度扩大 $7/2$ 倍, 则所得到的频谱的非零值就占满了整个 $-\pi$ 到 π 的频率范围。 $7/2$ 是有理数, 因而我们可以先进行 $I=2$ 的插值, 即将 $x(n]$ 以 2 来增抽样, 得到序列 $x_I(n]$, 其频谱为图 3-28(c) 所示, 再进行 $D=7$ 的抽取, 即 $x(n]$ 再以 7 来减抽样得到 $x_M(n]$, 其频谱 $X_M(e^{j\omega})$ 如图 3-28(d) 所示。这一联合作用的结果就相当于 $x(n]$ 以一个非整数的有理数 $7/2$ 进行减抽样。如果 $x(n]$ 代表一个连续时间信号 $x_a(t)$ 的无混叠抽样序列, 则这个经过插值($I=2$)和抽取($D=7$)的序列 $x_M(n]$ 就代表了 $x_a(t)$ 的最大可能无混叠的减抽样序列。

我们知道抽取和插值的概念出现在很多重要的信号处理的实际应用中, 其中包括通信系统、数字高频、高分辨率电视以及其他很多应用领域。

习 题

1. 如图 P3-1 所示, 序列 $x(n]$ 是周期为 6 的周期性序列, 试求其傅立叶级数的系数。

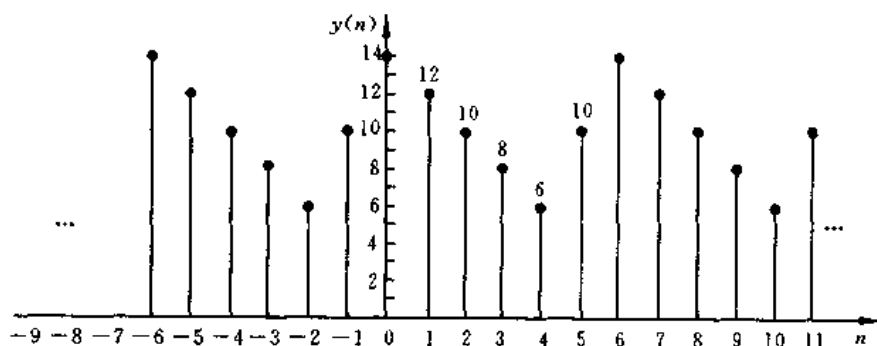


图 P3-1

2. 设 $x(n]=R_4(n)$, $\tilde{x}(n)=x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并作图表示 $\tilde{x}(n)$, $\tilde{X}(k)$ 。

3. 设 $x(n)=\begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$

$$h(n)=R_4(n-2)$$

令 $\tilde{x}(n)=x((n))_6$, $\tilde{h}(n)=h((n))_6$

试求 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{h}(n)$ 的周期卷积并作图。

4. 已知 $x(n)$ 如图 P3-4 所示为 $\{1, 1, 3, 2\}$, 试画出 $x((-n))_5$, $x((-n))_6 R_6(n)$, $x((n))_3 R_3(n)$, $x((n))_6$, $x((n-3))_5 R_5(n)$, $x((n))_7 R_7(n)$ 等各序列。



图 P3-4

5. 试求以下有限长序列的 N 点 DFT (闭合形式表达式):

$$(1) x(n)=a(\cos \omega_0 n) R_N(n) \quad (2) x(n)=a^* R_N(n)$$

$$(3) x(n)=\delta(n-n_0), \quad 0 < n_0 < N \quad (4) x(n)=n R_N(n)$$

$$(5) x(n)=n^2 R_N(n)$$

6. 图 P3-6 画出了几个周期序列 $\tilde{x}(n)$, 这些序列可以表示成傅里叶级数

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk}$$

问:

(1) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ 成为实数

(2) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ [除 $\tilde{X}(0)$ 外] 成为虚数?

(3) 哪些序列能做到 $\tilde{X}(k)=0$, $k=\pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$

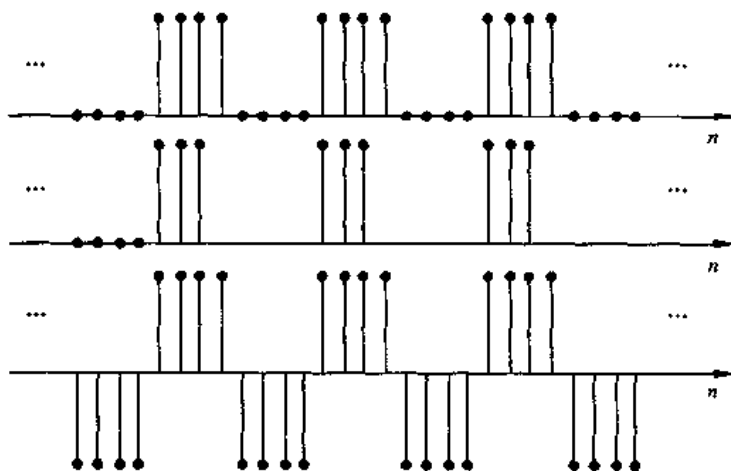


图 P3-6

7. 图 P3-7 画出了两个有限长序列, 试画出它们的六点圆周卷积。

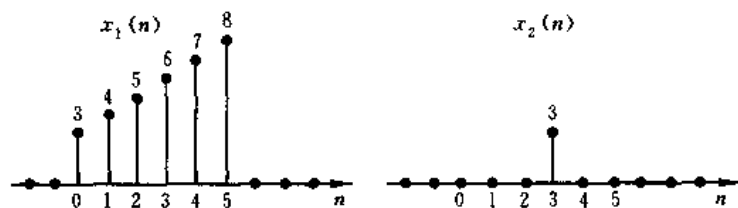


图 P3-7

8. 图 P3-8 表示一个 5 点序列 $x(n]$,

(1) 试画出 $x(n) * x(n)$; (2) 试画出 $x(n)(5)x(n)$; (3) 试画出 $x(n)(10)x(n)$ 。



图 P3-8

9. 设有两序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq 14 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

各作 15 点的 DFT, 然后将两个 DFT 相乘, 再求乘积的 IDFT, 设所得结果为 $f(n)$,

问 $f(n)$ 的哪些点 (用序号 n 表示) 对应于 $x(n) * y(n)$ 应该得到的点。

10. 已知两个有限长序列为

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} -1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

试用作图表示 $x(n)$, $y(n)$ 以及 $f(n) = x(n) \otimes y(n)$ 。

11. 已知 $x(n)$ 是 N 点有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将它变成 rN 点的有限长序列 $y(n)$

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

试求 $\text{DFT}[y(n)]$ (rN 点 DFT) 与 $X(k)$ 的关系。

12. 已知 $x(n)$ 是 N 点的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零值点, 得到一个 rN 点的有限长序列 $y(n)$

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

13. 频谱分析的模拟信号以 8kHz 被抽样, 计算了 512 个抽样的 DFT, 试确定频谱抽样之间的频率间隔, 并证明你的回答。

14. 设有一谱分析用的信号处理器, 抽样点数必须为 2 的整数幂, 假定没有采用任何特殊数据处理

措施,要求频率分辨率 $\leq 10\text{Hz}$,如果采用的抽样时间间隔为 0.1ms ,试确定

- (1) 最小记录长度;
- (2) 所允许处理的信号的最高频率;
- (3) 在一个记录中的最少点数。

15. 序列 $x(n)$ 的共轭对称和共轭反对称分量分别为

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)], \quad x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

N 点有限长序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的圆周共轭对称和圆周共轭反对称分量分别定义如下:

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((-n))_N]R_N(n)$$

(a) 证明

$$x_{ep}(n) = [x_e(n) + x_e(N-n)]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = [x_o(n) + x_o(N-n)]R_N(n)$$

(b) 把 $x(n)$ 看作 N 点的序列,一般说,不能从 $x_{ep}(n)$ 恢复 $x_e(n)$,也不能从 $x_{op}(n)$ 恢复 $x_o(n)$ 。试证明,若把 $x(n)$ 看作为 N 点的序列,且 $n \geq N/2$ 时 $x(n) = 0$,则从 $x_{ep}(n)$ 可恢复 $x_e(n)$,从 $x_{op}(n)$ 可恢复 $x_o(n)$ 。

16. 令 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅立叶变换,

(a) 证明如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n) = -x(N-1-n)$,则 $X(0) = 0$

(b) 证明当 N 为偶数时,如果 $x(n) = x(N-1-n)$,则 $X(N/2) = 0$

17. 设 $x_1(n) = R_5(n)$ 。

(1) 求 $X_1(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_1(n)]$,画出它的幅频特性和相频特性(标出主要坐标值)。

(2) 求 $X_2(k) = \text{DFT}[x_1((n))_{10}R_{10}(n)]$,并画出它的幅频特性。

(3) 求 $X_3(k) = \text{DFT}[(-1)^n x_1((n))_{10}R_{10}(n)]$,并画出它的幅频特性。

(4) 求 $x_4(n) = \text{IDFT}[X_{2op}(k)]$ 。

(5) 求 $x_5(n) = \text{IDFT}[\text{Im}[X_2(k)]]$ 。

(6) 求 $x_6(n) = \text{IDFT}[X_2((N-1-k))_N R_N(n)]$ 。

(7) 求 $x_7(n) = \text{IDFT}[W_{10}^{-2k} X_2(k) X_2(k)]$ 。

18. 已知 $y(n) = x(N-1-n)$, $u(n) = (-1)^n x(n)$,且 $x(n)$, $u(n)$, $y(n)$ 都是 N 点实序列。试用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$, $U(k)$,其中 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $U(k) = \text{DFT}[u(n)]$ 。

19. 复数有限长序列 $f(n)$ 是由两个实有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 组成的, $f(n) = x(n) + jy(n)$,且已知 $F(k) = \text{DFT}[f(n)]$ 有以下两种表达式:

$$(1) F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} \quad (2) F(k) = 1 + jN$$

其中 a, b 为实数。试用 $F(k)$ 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $x(n)$, $y(n)$ 。

20. 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$,现对 $x(n)$ 的 z 变换在单位圆上 N 等分抽样,抽样值为 $X(k)$
 $= X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$,试求有限长序列 $\text{IDFT}[X(k)]$, N 点。

21. 若 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$,问 $\text{DFT}[X(n)] = ?$

22. 已知 $x(n)$ 是 $2N$ 点的实序列 ($0 \leq n \leq 2N-1$),其离散傅里叶变换为 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $2N$ 点,请你用一个 N 点 FFT 运算来求此 $X(k)$ 。

(提示:先将 $2N$ 点的 $x(n)$ 按 n 的奇偶分解为两个 N 点序列。)

23. 考虑图 P3-23 所示系统输入为 $x(n]$, 输出为 $y(n]$, 零值插入系统在每一序列 $x(n]$ 值之间插入 2 个零值点, 抽取系统定义为

$$y(n) = w(5n)$$

其中 $w(n)$ 是抽取系统的输入系列。若输入 $x(n]$ 为

$$x(n) = \frac{\sin(\omega_1 n)}{\pi n}$$

试确定下列 ω 值时的输出 $y(n]$:

$$(a) \omega_1 \leq \frac{3}{5}\pi; \quad (b) \omega_1 > \frac{3}{5}\pi。$$

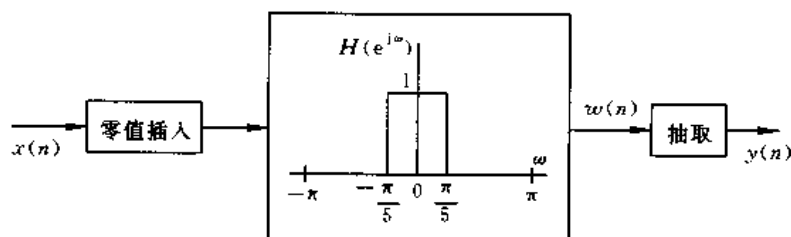


图 P3-23

24. 用两个离散时间系统 T_1 和 T_2 来实现理想低通滤波器(截止频率为 $\pi/4$)。系统 T_1 如图 P3-24(a)所示, 系统 T_2 如图 P3-24(b)所示。在此二图中, T_A 表示一个零值插入系统, 它先在每一个输入样本之后插入一个零值点; T_B 表示一个抽取系统, 它先在其每两个输入中取出一个。问:

(1) T_1 相当于所要求的理想低通滤波器吗?

(2) T_2 相当于所要求的理想低通滤波器吗?

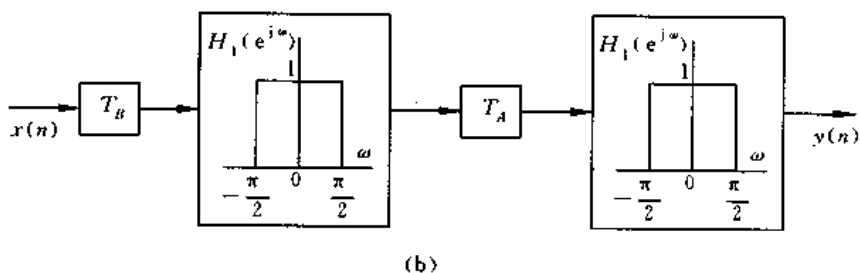
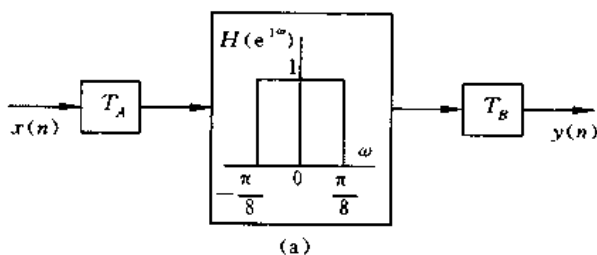


图 P3-24

25. 对 $x(n]$ 进行冲激串抽样得到

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n - mN)$$

若 $X(e^{j\omega}) = 0, \frac{3\pi}{7} \leq \omega \leq \pi$, 试确定当抽样 $x(n)$ 时, 保证不发生混叠的最大抽样间隔 N 。

26. 研究一个离散时间序列 $x(n]$, 由 $x(n)$ 形成两个新序列 $x_p(n)$ 和 $x_d(n)$, 其中 $x_p(n)$ 相当于以抽样周期为 2 对 $x(n)$ 抽样而得到, 而 $x_d(n)$ 则是以 2 对 $x(n)$ 进行抽取而得到, 即

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0, & n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

$$x_d(n) = x(2n)$$

(a) 若 $x(n)$ 如图 P3-26(a) 所示, 画出 $x_p(n)$ 和 $x_d(n)$ 。

(b) $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 如图 P3-26(b) 所示。画出 $X_p(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_p(n)]$ 及 $X_d(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_d(n)]$ 。

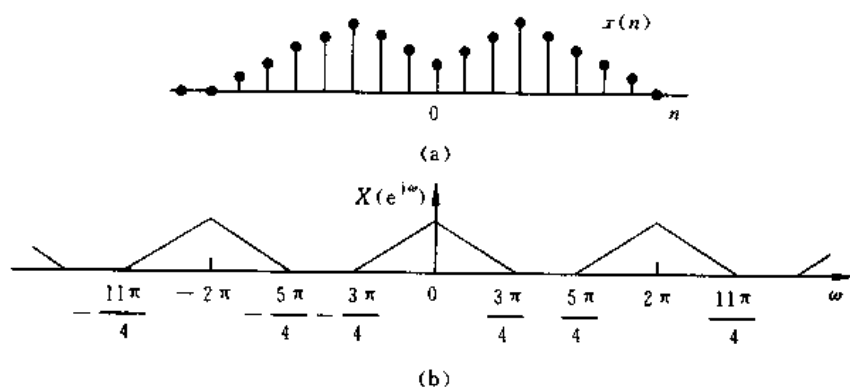


图 P3-26

第四章 快速傅里叶变换

4.1 引言

快速傅里叶变换(FFT)并不是一种新的变换,而是离散傅里叶变换(DFT)的一种快速算法。因此,为了很好地理解和掌握快速傅里叶变换,必须首先对第三章介绍的离散傅里叶变换有充分的理解与掌握。

我们已经知道,有限长序列的重要特点是其频域也可离散化成有限长序列,即可进行离散傅里叶变换。DFT 的计算在数字信号处理中非常有用,例如,在 FIR 滤波器设计中会遇到从 $h(n)$ 求 $H(k)$ 或由 $H(k)$ 求 $h(n)$,这就要计算 DFT。再有,信号的频谱分析对通信、图像传输、雷达、声呐等都是很重要的。此外,在系统的分析、设计和实现中都会用到 DFT 的计算。但是,在相当长的时间里,由于 DFT 的计算量太大,即使采用计算机也很难对问题进行实时处理,所以并没有得到真正的运用。直到 1965 年库利(J. W. Cooley)和图基(J. W. Tukey)在《计算数学》(Mathematics of Computation)杂志上发表了著名的“机器计算傅里叶级数的一种算法”的文章,提出了 DFT 的一种快速算法,后来又有桑德(G. Sande)和图基的快速算法相继出现,情况才发生了根本的改变。经过人们对算法的改进,发展和完善了一套高速有效的运算方法,使 DFT 的计算大大简化,运算时间一般可缩短一、二个数量级,从而使 DFT 的运算在实际中真正得到了广泛的应用。

本章主要讨论若干种 FFT 算法以及 FFT 的一些具体实现方法。

4.2 直接计算 DFT 的问题及改进的途径

设 $x(n)$ 为 N 点有限长序列,其 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-1)$$

反变换(IDFT)为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-2)$$

二者的差别只在于 W_N 的指数符号不同,以及差一个常数乘因子 $1/N$,因而下面我们只讨论 DFT 正变换(4-1)式的运算量。(4-2)式运算量是完全相同的。

一般来说, $x(n)$ 和 W_N^{nk} 都是复数, $X(k)$ 也是复数,因此每计算一个 $X(k)$ 值,需要 N 次复数乘法($x(n)$ 与 W_N^{nk} 相乘)以及 $(N-1)$ 次复数加法。而 $X(k)$ 一共有 N 个点(k 从 0 取到 $N-1$),所以完成整个 DFT 运算总共需要 N^2 次复数乘法及 $N(N-1)$ 次复数加法。我们知道复数运算实际上是由实数运算来完成的,(4-1)式可写成

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \{ \text{Re}[x(n)] + j \text{Im}[x(n)] \} \{ \text{Re}[W_N^{nk}] + j \text{Im}[W_N^{nk}] \}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \{ \operatorname{Re}[x(n)]\operatorname{Re}[W_N^{nk}] - \operatorname{Im}[x(n)]\operatorname{Im}[W_N^{nk}] \\ + j(\operatorname{Re}[x(n)]\operatorname{Im}[W_N^{nk}] + \operatorname{Im}[x(n)]\operatorname{Re}[W_N^{nk}]) \} \quad (4-3)$$

由此式可见,一次复数乘法需用四次实数乘法和二次实数加法;一次复数加法则需二次实数加法。因而每运算一个 $X(k)$ 需 $4N$ 次实数乘法及 $2N+2(N-1)=2(2N-1)$ 次实数加法。所以整个 DFT 运算总共需要 $4N^2$ 次实数乘法和 $N \times 2(2N-1)=2N(2N-1)$ 次实数加法。

上述统计与实际需要的运算次数有些出入,因为某些 W_N^k 可能是 1 或 j ,就不必相乘了,例如 $W_N^0=1, W_N^{N/2}=-1, W_N^{N/4}=j$ 等就不需乘法。但是为了比较,一般都不考虑这些特殊情况,而是把 W_N^k 都看成复数,当 N 很大时,这种特例的比重就很小。

因而,直接计算 DFT,乘法次数和加法次数都是和 N^2 成正比的,当 N 很大时,运算量是很可观的,例如,当 $N=8$ 时,DFT 需 64 次复乘,而当 $N=1024$ 时,DFT 所需复乘为 1 048 576 次,即一百多万次复乘运算,这对实时性很强的信号处理来说,对计算速度要求是太高了。因而需要改进对 DFT 的计算方法,以大大减少运算次数。

下面讨论减少运算工作量的途径。仔细观察 DFT 的运算就可看出,利用系数 W_N^k 的以下固有特性,就可减小 DFT 的运算量:

(1) W_N^k 的对称性

$$(W_N^k)^* = W_N^{-k}$$

(2) W_N^k 的周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k-N)}$$

(3) W_N^k 的可约性

$$W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk}, \quad W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$$

由此可得出

$$W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk}, \quad W_N^{N/2} = -1, \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

这样,(1)利用这些特性,使 DFT 运算中有些项可以合并;(2)利用 W_N^k 的对称性、周期性和可约性,可以将长序列的 DFT 分解为短序列的 DFT。而前面已经说到,DFT 的运算量是与 N^2 成正比的,所以 N 越小越有利,因而小点数序列的 DFT 比大点数序列的 DFT 的运算量要小。

快速傅里叶变换算法正是基于这样的基本思路而发展起来的。它的算法基本上可以分成两大类,即按时间抽选(decimation-in-time,缩写为 DIT)法和按频率抽选(decimation-in-frequency,缩写为 DIF)法。

4.3 按时间抽选(DIT)的基-2 FFT 算法(库利-图基算法)

一、算法原理

先设序列点数为 $N=2^L$, L 为整数。如果不满足这个条件,可以人为地加上若干零值点,使之达到这一要求。这种 N 为 2 的整数幂的 FFT 也称基-2 FFT。

将 $N=2^L$ 的序列 $x(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$) 先按 n 的奇偶分成以下两组:

$$\left. \begin{aligned} x(2r) &= x_1(r) \\ x(2r+1) &= x_2(r) \end{aligned} \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-4)$$

则可将 DFT 化为

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为偶数}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为奇数}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) (W_N^2)^{rk} \end{aligned}$$

利用系数 W_N^{nk} 的可约性, 即 $W_N^{2k} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$, 上式可表示成

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad (4-5)$$

式中 $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 分别是 $x_1(r)$ 及 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT:

$$X_1(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} \quad (4-6)$$

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk} \quad (4-7)$$

由(4-5)式可看出, 一个 N 点 DFT 已分解成两个 $N/2$ 点的 DFT, 它们按(4-5)式又组合成一个 N 点 DFT。但是, $x_1(r)$, $x_2(r)$ 以及 $X_1(k)$, $X_2(k)$ 都是 $N/2$ 点的序列, 即 r, k 满足 $r, k=0, 1, \dots, N/2-1$ 。而 $X(k)$ 却有 N 点, 而用(4-5)式计算得到的只是 $X(k)$ 的前一半项数的结果, 要用 $X_1(k)$, $X_2(k)$ 来表达全部的 $X(k)$ 值, 还必须应用系数的周期性, 即

$$W_{N/2}^{rk} = W_{N/2}^{r(\frac{N}{2}+k)}$$

这样可得到

$$X_1\left(\frac{N}{2}+k\right) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{N/2}^{r(\frac{N}{2}+k)} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = X_1(k) \quad (4-8)$$

同理可得

$$X_2\left(\frac{N}{2}+k\right) = X_2(k) \quad (4-9)$$

(4-8)式、(4-9)式说明了后半部分 k 值 ($N/2 \leq k \leq N-1$) 所对应的 $X_1(k)$, $X_2(k)$ 分别等于前半部分 k 值 ($0 \leq k \leq N/2-1$) 所对应的 $X_1(k)$, $X_2(k)$ 。

再考虑到 W_N^k 的以下性质

$$W_N^{\left(\frac{N}{2}+k\right)} = W_N^{N/2} W_N^k = -W_N^k \quad (4-10)$$

这样, 把(4-8)式、(4-9)式、(4-10)式代入(4-5)式, 就可将 $X(k)$ 表达为前后两部分:

$$\text{前半部分 } X(k) \left(k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right)$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-11)$$

后半部分 $X(k) \left(k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \right)$

$$\begin{aligned} X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{\left(k + \frac{N}{2}\right)} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) \\ &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4-12)$$

这样,只要求出 0 到 $(N/2-1)$ 区间的所有 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 值,即可求出 0 到 $(N-1)$ 区间内的所有 $X(k)$ 值,这就大大节省了运算。

(4-11)式和(4-12)式的运算可以用图 4-1 的蝶形信号流图符号表示。流图的表示法将在第五章中讨论,当支路上没有标出系数时,则该支路的传输系数为 1。

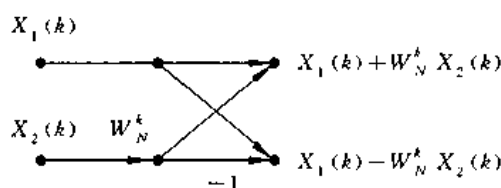


图 4-1 时间抽选法蝶形运算流图符号

采用这种表示法,可将上面讨论的分解过程表示于图 4-2 中。此图表示 $N=2^3=8$ 的情况,其中输出值 $X(0)$ 到 $X(3)$ 是由(4-11)式给出的,而输出值 $X(4)$ 到 $X(7)$ 是由(4-12)式给出的。

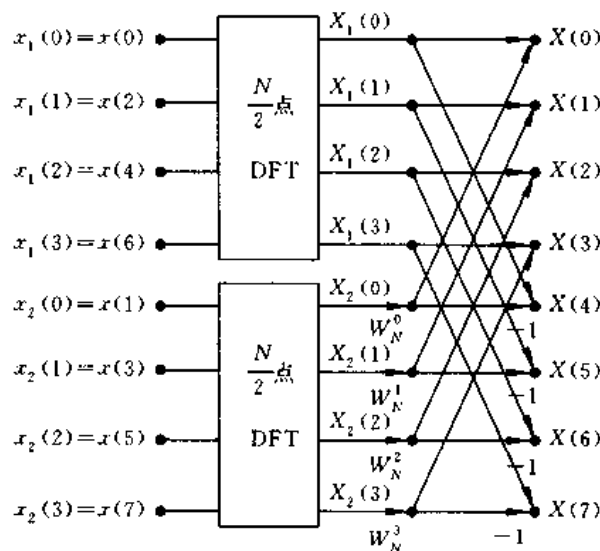


图 4-2 按时间抽选,将一个 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT

可以看出,每个蝶形运算需要一次复数乘法 $X_2(k)W_N^k$ 及两次复数加(减)法。

据此,一个 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT 后,如果直接计算 $N/2$ 点 DFT,则每

一个 $N/2$ 点 DFT 只需要 $\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$ 次复数乘法, $\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次复数加法, 两个 $N/2$ 点 DFT 共需 $2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$ 次复数乘法和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次复数加法。此外把两个 $N/2$ 点 DFT 合成为 N 点 DFT 时, 有 $N/2$ 个蝶形运算, 还需要 $N/2$ 次复数乘法及 $2 \times N/2 = N$ 次复数加法。因而通过这第一步分解后, 总共需要 $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$ 次复数乘法和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right) + N = \frac{N^2}{2}$ 次复数加法, 因此通过这样分解后运算工作量差不多减少到一半。

既然如此, 由于 $N=2^L$, 因而 $N/2$ 仍是偶数, 可以进一步把每个 $N/2$ 点子序列再按其奇偶部分分解为两个 $N/4$ 点的子序列。

$$\left. \begin{aligned} x_1(2l) &= x_3(l) \\ x_1(2l+1) &= x_4(l) \end{aligned} \right\}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \quad (4-13)$$

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \\ &= X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \end{aligned}$$

且

$$X_1\left(\frac{N}{4}+k\right) = X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1$$

其中

$$X_3(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} \quad (4-14)$$

$$X_4(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \quad (4-15)$$

图 4-3 给出 $N=8$ 时, 将一个 $N/2$ 点 DFT 分解成两个 $N/4$ 点 DFT, 由这两个 $N/4$ 点 DFT 组合成一个 $N/2$ 点 DFT 的流图。

$X_2(k)$ 也可进行同样的分解:

$$\left. \begin{aligned} X_2(k) &= X_5(k) + W_{N/2}^k X_6(k) \\ X_2\left(\frac{N}{4}+k\right) &= X_5(k) - W_{N/2}^k X_6(k) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1$$

$$\text{其中} \quad X_5(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(2l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_5(l) W_{N/4}^{lk} \quad (4-16)$$

$$X_6(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(2l+1) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_6(l) W_{N/4}^{lk} \quad (4-17)$$

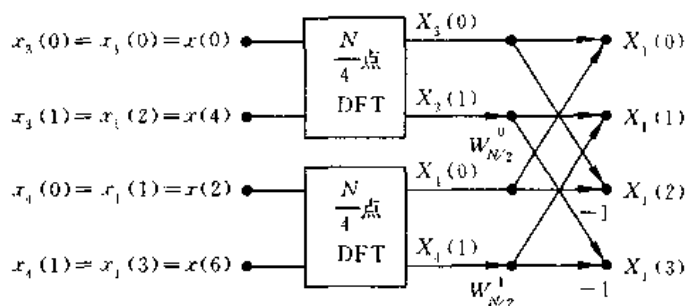


图 4-3 由两个 $N/4$ 点 DFT 组合成一个 $N/2$ 点 DFT

将系数统一为 $W_{N/2}^k = W_N^{2k}$, 则一个 $N=8$ 点 DFT 就可分解为四个 $\frac{N}{4}=2$ 点 DFT, 这样可得图 4-4 所示的流图。

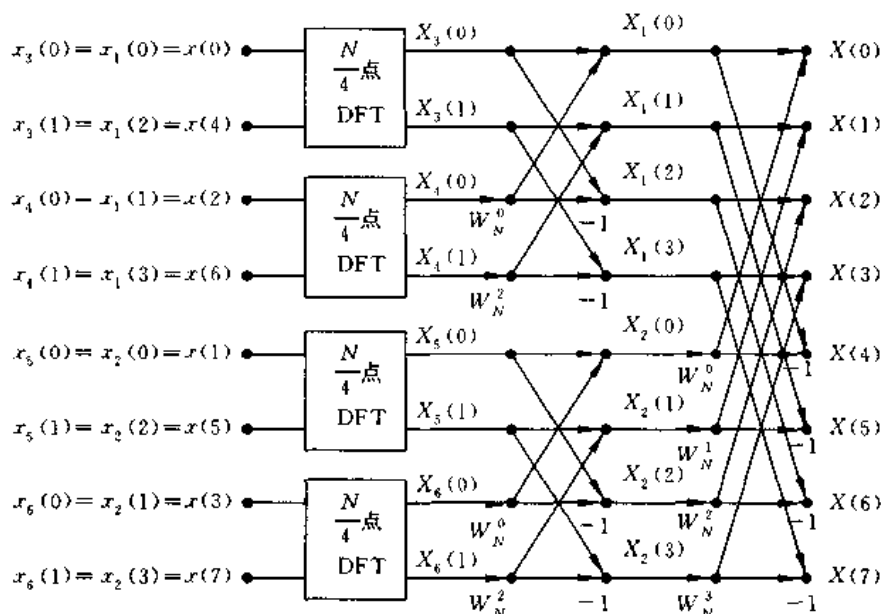


图 4-4 按时间抽选, 将一个 N 点 DFT 分解为四个 $N/4$ 点 DFT ($N=8$)

根据上面同样的分析知道利用四个 $N/4$ 点的 DFT 及两级蝶形组合运算来计算 N 点 DFT, 比只用一次分解蝶形组合方式的计算量又减少了大约一半。

现在来讨论这一按偶数与奇数的分解过程中序列标号的变化。对于一个 $N=8$ 点的 DFT 的例子, 输入序列 $x(n)$ 按偶数点与奇数点第一次分解为两个 $N/2$ 点序列:

偶序列

$$x_1(2l) = x_1(r)$$

奇序列

$$x_1(2l+1) = x_2(r)$$

$$r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

r	0	1	2	3
$n=2r$	0	2	4	6

r	0	1	2	3
$n=2r+1$	1	3	5	7

第二次分解,把每个 $N/2$ 点的子序列按其偶、奇分解为两个 $N/4$ 点子序列:

$$l = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

偶序列中的偶数序列

$$x_1(2l) = x_3(l)$$

l	0	1
$r=2l$	0	2
$n=2r$	0	4

偶序列中的奇数序列

$$x_1(2l+1) = x_4(l)$$

l	0	1
$r=2l+1$	1	3
$n=2r$	2	6

奇序列中的偶数序列

$$x_2(2l) = x_5(l)$$

l	0	1
$r=2l$	0	2
$n=2r+1$	1	5

奇序列中的奇数序列

$$x_2(2l+1) = x_6(l)$$

l	0	1
$r=2l+1$	1	3
$n=2r+1$	3	7

最后剩下的是 2 点 DFT, 对于此例 $N=8$, 就是四个 $N/4=2$ 点 DFT, 其输出为 $X_3(k)$, $X_4(k)$, $X_5(k)$, $X_6(k)$, $k=0, 1$, 这由(4-14)式到(4-17)式四个式子可以计算出来。例如, 由(4-15)式可得

$$X_4(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4(l) W_{N/4}^k = \sum_{l=0}^1 x_1(l) W_{N/4}^k, \quad k = 0, 1$$

即

$$X_4(0) = X_4(0) + W_2^0 X_4(1) = x(2) + W_2^0 x(6) = x(2) + W_N^0 x(6)$$

$$X_4(1) = X_4(0) + W_2^1 X_4(1) = x(2) + W_2^1 x(6) = x(2) - W_N^0 x(6)$$

注意上式中 $W_2^1 = e^{-j\frac{2\pi}{2} \times 1} = e^{-j\pi} = -1 = -W_N^0$, 故计算上式不需乘法。类似地可求出 $X_3(k)$, $X_5(k)$, $X_6(k)$, 这些两点 DFT 都可用一个蝶形结表示。由此可得出一个按时间抽选运算的完整的 8 点 DFT 流图, 如图 4-5 所示。

这种方法的每一步分解都是按输入序列在时间上的次序是属于偶数还是属于奇数来分解为两个更短的子序列, 所以称为“按时间抽选法”。

二、运算量

由按时间抽选法 FFT 的流图可见, 当 $N=2^L$ 时, 共有 L 级蝶形, 每级都由 $N/2$ 个蝶形运算组成, 每个蝶形有一次复乘、二次复加, 因而每级运算都需 $N/2$ 次复乘和 N 次复加, 这样 L 级运算总共需要

$$\text{复乘数} \quad m_F = \frac{N}{2} L = \frac{N}{2} \log_2 N \quad (4-18)$$

$$\text{复加数} \quad a_F = NL = N \log_2 N \quad (4-19)$$

实际计算量与这个数字稍有不同, 因为 $W_N^0 = 1$ (这样情况共有 $1+2+4+\dots+2^{L-1} = \sum_{i=0}^{L-1} 2^i = 2^L - 1 = N - 1$), $W_N^{N/4} = -j$, 这几个系数都不用乘法运算, 但是这些情况在直接

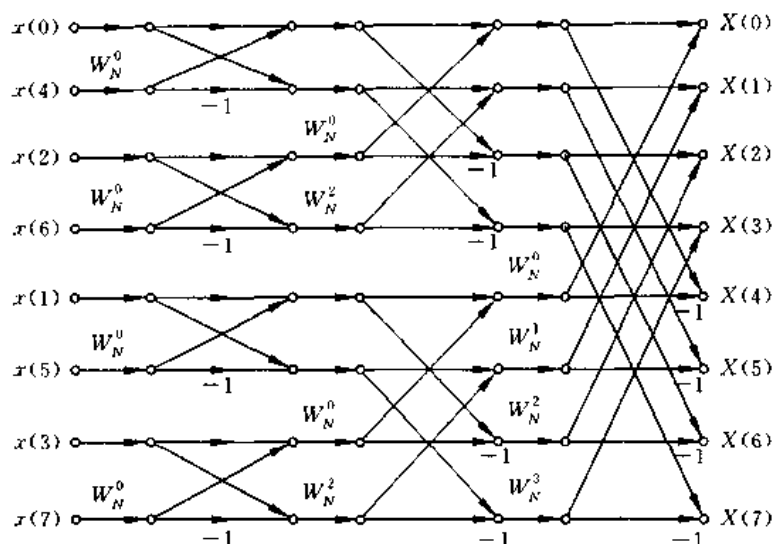


图 4-5 $N=8$ 按时间抽选法 FFT 运算流图

计算 DFT 中也是存在的。此外,当 N 较大时,这些特例相对而言就很少。所以,为了统一作比较起见,下面都不考虑这些特例。

由于计算机上乘法运算所需时间比加法运算所需时间多得多,故以乘法为例,在表 4-1 中列表说明 FFT 算法与直接 DFT 算法运算量的比较。直接 DFT 复数乘法次数是 N^2 ,FFT 复数乘法次数是 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 。

直接计算 DFT 与 FFT 算法的计算量之比为

$$\frac{\frac{N^2}{2}L}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N} \quad (4-20)$$

这一比值已列在表 4-1 中。

表 4-1 FFT 算法与直接 DFT 算法的比较

N	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	$N^2 / \left(\frac{N}{2} \log_2 N \right)$
2	4	1	4.0
4	16	4	4.0
8	64	12	5.4
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.4
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64.0
512	262144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8
2048	4194304	11264	372.4

图 4-6 是直接计算 DFT 与 FFT 算法所需运算量分别与点数 N 的关系曲线,可以更加直观地看出 FFT 算法的优越性,尤其是当点数 N 越大时,FFT 的优点更突出。

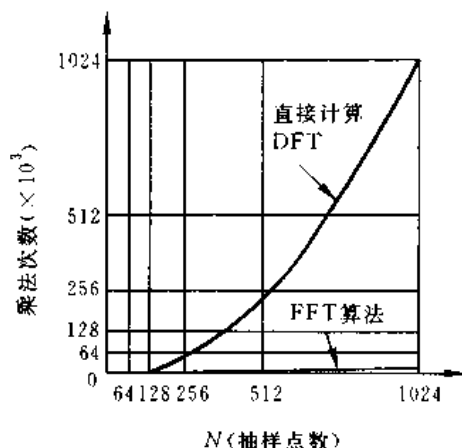


图 4-6 直接计算 DFT 与 FFT 算法所需乘法次数的比较

三、按时间抽选的 FFT 算法的特点

为了得出任何 $N=2^L$ 点的按时间抽选基 2 FFT 信号流图,我们来考虑这种按时间抽选法在运算方式上的特点。

1. 原位运算(同址运算)

从图 4-5 可以看出这种运算是很有规律的,其每级(每列)计算都是由 $N/2$ 个蝶形运算构成,每一个蝶形结构完成下述基本迭代运算:

$$\begin{aligned} X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}(j)W_N^r \\ X_m(j) &= X_{m-1}(k) - X_{m-1}(j)W_N^r \end{aligned} \quad (4-21)$$

式中 m 表示第 m 列迭代, k, j 为数据所在行数。(4-21)式的蝶形运算如图 4-7 所示,由一次复乘和两次复加(减)组成。

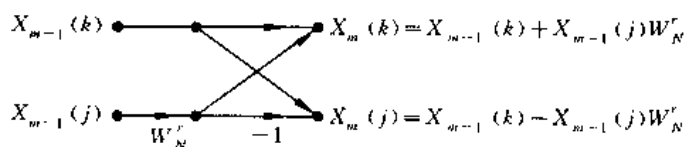


图 4-7 按时间抽选蝶形运算结构

由图 4-5 的流图看出,某一列的任何两个节点 k 和 j 的节点变量进行蝶形运算后,得到结果为下一列 k, j 两节点的节点变量,而和其他节点变量无关,因而可以采用原位运算,即某一列的 N 个数据送到存储器后,经蝶形运算,其结果为另一列数据,它们以蝶形为单位仍存储在这同一组存储器中,直到最后输出,中间无需其他存储器。也就是蝶形的两个输出值仍放回蝶形的两个输入所在的存储器中。每列的 $N/2$ 个蝶形运算全部完成后,再开始下一列的蝶形运算。这样存储数据只需 N 个存储单元。下一级的运算仍采用这种原位方式,只不过进入蝶形结的组合关系有所不同。这种原位运算结构可以节省存储单元,降低设备成本。

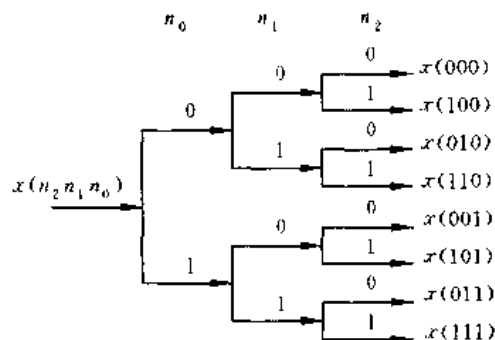


图 4-8 描述倒位序的树状图

2. 倒位序规律

由图 4-5 看出,按原位计算时,FFT 的输出 $X(k)$ 是按正常顺序排列在存储单元中,即按 $X(0), X(1), \dots, X(7)$ 的顺序排列,但是这时输入 $x(n)$ 却不是按自然顺序存储的,而是按 $x(0), x(4), \dots, x(7)$ 的顺序存入存储单元,看起来好像是“混乱无序”的,实际上是有规律的,我们称之为倒位序。

造成倒位序的原因是输入 $x(n)$ 按标号 n 的偶奇的不断分组而造成。如果 n 用二进制数表示为 $(n_2 n_1 n_0)_2$ (当 $N=8=2^3$ 时,二进制为三位),第一次分组,由图 4-2 看出, n 为偶数在上半部分, n 为奇数在下半部分,这可以观察 n 的二进制数的最低位 n_0 , $n_0=0$ 则序列值对应于偶数抽样, $n_0=1$ 则序列值对应于奇数抽样。下一次则根据次最低位 n_1 的 0,1 来分偶奇(而不管原来的子序列是偶序列还是奇序列)。这种不断分成偶数子序列和奇数子序列的过程可用图 4-8 的二进制树状图来描述。这就是 DIT 的 FFT 算法输入序列的序数成为倒位序的原因。

3. 倒位序的实现

一般实际运算中,总是先按自然顺序将输入序列存入存储单元,为了得到倒位序的排列,我们通过变址运算来完成。如果输入序列的序号 n 用二进制数(例如 $n_2 n_1 n_0$)表示,则其倒位序二进制数 \hat{n} 就是 $(n_0 n_1 n_2)$,这样,在原来自然顺序时应该放 $x(n)$ 的单元,现在倒位序后应放 $x(\hat{n})$ 。例如 $N=8$ 时, $x(3)$ 的标号是 $n=3$,它的二进制数是 011,倒位序的二进制数是 110,即 $\hat{n}=6$,所以存放 $x(011)$ 的单元现在应该存放 $x(110)$ 。表 4-2 列出了 $N=8$ 时的自然顺序二进制数以及相应的倒位序二进制数。

表 4-2 码位的倒位序 ($N=8$)

自然顺序(n)	二进制数	倒位序二进制数	倒位序顺序(\hat{n})
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

把按自然顺序存放在存储单元中的数据,换成 FFT 原位运算所要求的倒位序的变址功能如图 4-9 所示,当 $n=\hat{n}$ 时,不必调换,当 $n\neq\hat{n}$ 时,必须将原来存放数据 $x(n)$ 的存储单元内调入数据 $x(\hat{n})$,而将存放 $x(\hat{n})$ 的存储单元内调入 $x(n)$ 。为了避免把已调换过的数据再次调换,保证只调换一次(否则又回到原状),我们只需看 \hat{n} 是否比 n 小,若 \hat{n} 比 n 小,则意味着此 $x(n)$ 在前边已和 $x(\hat{n})$ 互相调换过,不必再调换了,只有当 $\hat{n}>n$ 时,才将原存放 $x(n)$ 及存放 $x(\hat{n})$ 的存储单元内的内容互换。这样就得到输入所需的倒位序的顺序。可以看出,其结果与图 4-5 的要求是一致的。

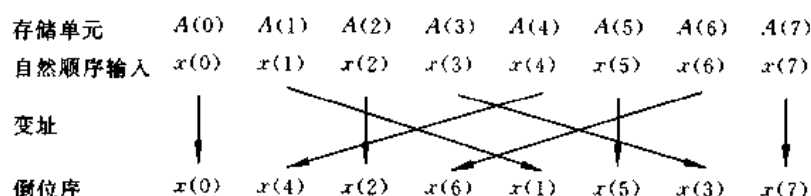


图 4-9 倒位序的变址处理

4. 蝶形运算两结点的“距离”

以图 4-5 的 8 点 FFT 为例,其输入是倒位序的,输出是自然顺序的,其第一级(第一列)每个蝶形的两节点间“距离”为 1,第二级每个蝶形的两节点“距离”为 2,第三级每个蝶形的两节点“距离”为 4,由此类推得,对 $N=2^L$ 点 FFT,当输入为倒位序,输出为正常顺序时,其第 m 级运算,每个蝶形的两节点“距离”为 2^{m-1} 。

5. W_N^r 的确定

由于对第 m 级运算,一个 DIT 蝶形运算的两节点“距离”为 2^{m-1} ,因而(4-21)式可写成

$$\begin{aligned} X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}(k + 2^{m-1})W_N^r \\ X_m(k + 2^{m-1}) &= X_{m-1}(k) - X_{m-1}(k + 2^{m-1})W_N^r \end{aligned} \quad (4-22)$$

现在问题是, W_N^r 中的 r 如何确定。可以通过严格的数学推导得到 r , 这里我们只给出结论,而省略掉推导过程。

r 的求解方法为: ① 把(4-22)式中,蝶形运算两节点中的第一个节点标号值,即 k 值,表示成 L 位(注意 $N=2^L$)二进制数;② 把此二进制数乘上 2^{L-m} ,即将此 L 位二进制数左移 $L-m$ 位(注意 m 是第 m 级的运算),把右边空出的位置补零,此数即为所求 r 的二进制数。

从图 4-5 看出, W_N^r 因子最后一列有 $N/2$ 种,顺序为 $W_N^0, W_N^1, \dots, W_N^{(N/2)-1}$, 其余可类推。

6. 存储单元

由于是原位运算,只需有输入序列 $x(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$) 的 N 个存储单元,加上系数 W_N^r ($r=0, 1, \dots, N/2-1$) 的 $N/2$ 个存储单元。

四、按时间抽选的 FFT 算法的其他形式流程图

显然,对于任何流程图,只要保持各节点所连的支路及其传输系数不变,则不论节点位置怎么排列所得流程图总是等效的,所得最后结果都是 $x(n)$ 的 DFT 的正确结果,只是数据

的提取和存放的次序不同而已。这样就得到按时间抽选的 FFT 算法的若干其他形式流图。

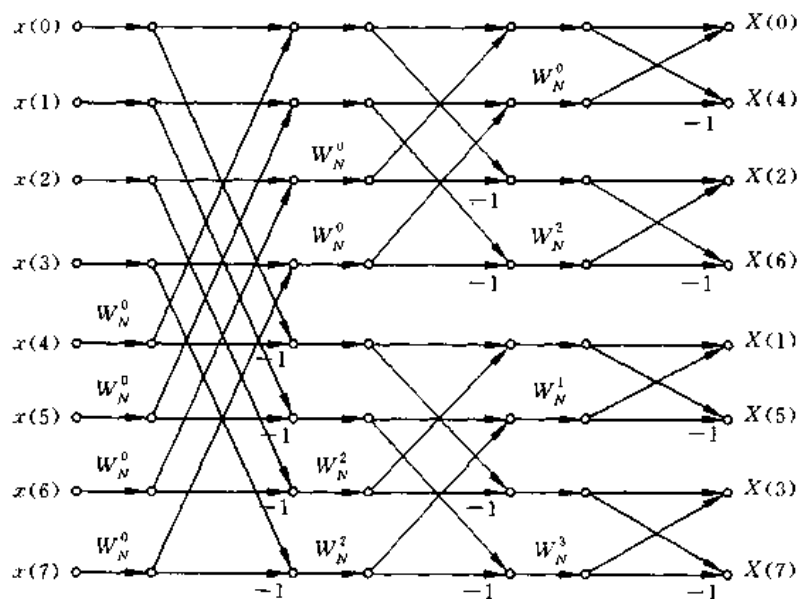


图 4-10 按时间抽选,输入自然顺序、输出倒位序的 FFT 流图

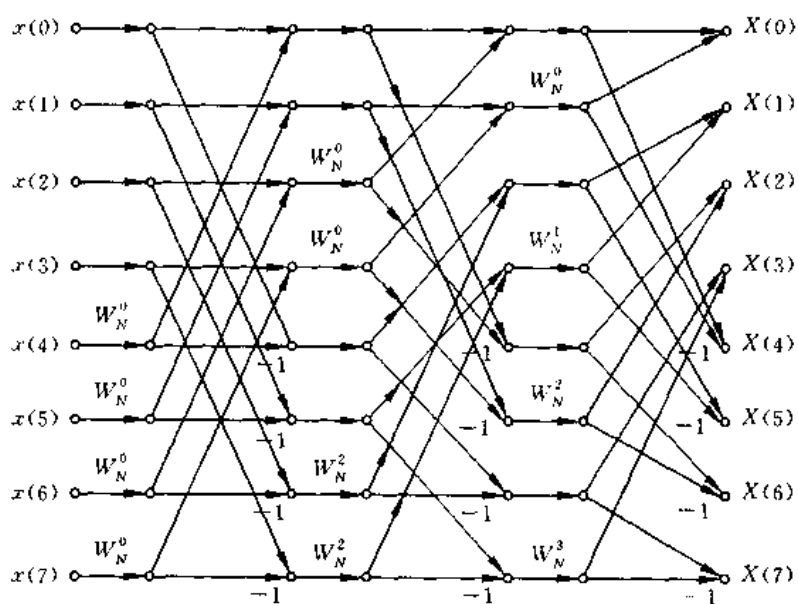


图 4-11 按时间抽选,输入输出皆为自然顺序的 FFT 流图

将图 4-5 中和 $x(4)$ 水平相连的所有节点与和 $x(1)$ 水平相连的节点位置对调,再将和 $x(6)$ 水平相连的所有节点与和 $x(3)$ 水平相连的所有节点对调,其余诸节点保持不变,可得图 4-10 的流图。图 4-10 与图 4-5 的蝶形相同,运算量也一样,不同点是:① 数据存放的方式不同,图 4-5 是输入倒位序、输出自然顺序,图 4-10 是输入自然顺序、输出倒位序;② 取用系数的顺序不同,图 4-5 的最后一列是按 $W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3$ 的顺序取用系数,

且其前一列所用系数是后一列所用系数中具有偶数幂的那些系数(例如 W_N^0, W_N^2, \dots); 图 4-10 的最后一列是按 $W_N^0, W_N^2, W_N^1, W_N^3$ 的顺序取用系数, 且其前一列所用的系数正好是后一列所用系数的前一半, 这种流图是最初由库利和图基给出的时间抽选法。

经过简单变换, 可得图 4-11 的流图。它的输入与输出都是按自然顺序排列的, 不需要倒位序重排数据。但是它却不能进行原位运算, 因此 N 个输入数据至少要 $2N$ 个复数存储单元。可以在专用硬件实现中利用这种流程。

图 4-5、图 4-10、图 4-11 各流图进行各列计算时, 各存储器的取数和存数的顺序都是不同的, 因此必须采用随机存储器。

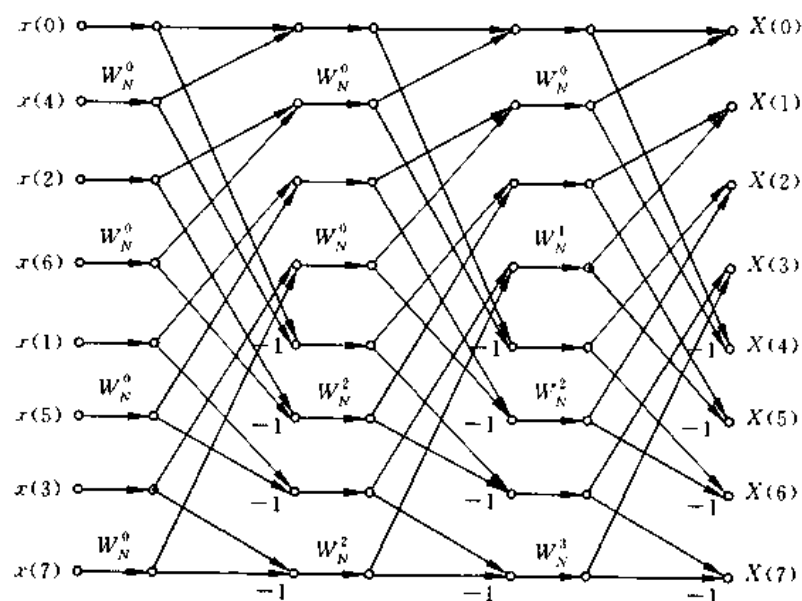


图 4-12 按时间抽选, 各级具有相同几何形状, 输入倒位序, 输出自然顺序的 FFT 流图

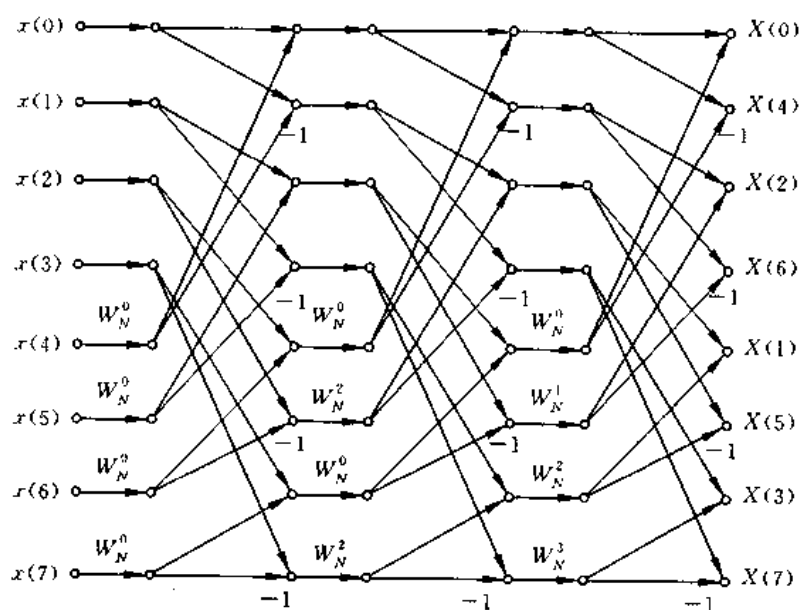


图 4-13 按时间抽选, 各级具有相同几何形状, 输入自然顺序, 输出倒位序的 FFT 流图

当没有随机存储器时,采用图 4-12 的流图特别有用。此流图输入是倒位序,而输出是自然顺序的,各级的几何形状完全一样,只是级与级之间的支路传输比是改变的,这就有可能按顺序存取数据。

图 4-13 也是各级几何形状相同的流图,不过它的输入是自然顺序排列,而输出是倒位序排列的。

4.4 按频率抽选(DIF)的基-2 FFT 算法(桑德-图基算法)

这里讨论另一种 FFT 算法,称为按频率抽选(DIF)的 FFT 算法,它是把输出序列 $X(k)$ (也是 N 点序列)按其顺序的奇偶分解为越来越短的序列。

一、算法原理

仍设序列点数为 $N=2^L$, L 为整数。在把输出 $X(k)$ 按 k 的奇偶分组之前,先把输入按 n 的顺序分成前后两半(注意,这不是频率抽选);

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\left(n+\frac{N}{2}\right)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2} \right] \cdot W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

式中用的是 W_N^{nk} , 而不是 $W_{N/2}^{nk}$, 因而这并不是 $N/2$ 点 DFT。

由于 $W_N^{N/2} = -1$, 故 $W_N^{Nk/2} = (-1)^k$, 可得

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-23)$$

当 k 为偶数时, $(-1)^k = 1$; k 为奇数时, $(-1)^k = -1$ 。因此,按 k 的奇偶可将 $X(k)$ 分为两部分。令

$$\left. \begin{aligned} k &= 2r \\ k &= 2r+1 \end{aligned} \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

则

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2nr} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr} \quad (4-24)$$

$$\begin{aligned} X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{n(2r+1)} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nr} \right\} W_{N/2}^{nr} \end{aligned} \quad (4-25)$$

(4-24)式为前一半输入与后一半输入之和的 $N/2$ 点 DFT, (4-25)式为前一半输入与后一半输入之差再与 W_N^n 之积的 $N/2$ 点 DFT。令

$$\left. \begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{aligned} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-26)$$

则

$$\left. \begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^r \\ X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^r \end{aligned} \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-27)$$

(4-26)式所表示的运算关系可以用图 4-14 所示的蝶形运算来表示。

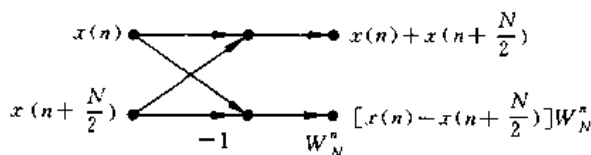


图 4-14 按频率抽选蝶形运算流图符号

这样,我们就把一个 N 点 DFT 按 k 的奇偶分解为两个 $N/2$ 点的 DFT 了(如(4-27)式所示)。 $N=8$ 时,上述分解过程示于图 4-15。

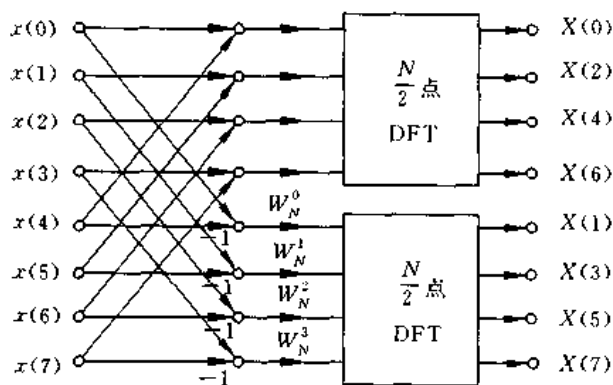


图 4-15 按频率抽选,将 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT 的组合($N=8$)

与时间抽选法的推导过程一样,由于 $N=2^L$, $N/2$ 仍是一个偶数,因而可以将每个 $N/2$ 点 DFT 的输出再分解为偶数组与奇数组,这就将 $N/2$ 点 DFT 进一步分解为两个 $N/4$ 点 DFT。这两个 $N/4$ 点 DFT 的输入也是先将 $N/2$ 点 DFT 的输入上下对半分开后通过蝶形运算而形成,图 4-16 示出了这一步分解的过程。

这样的分解可以一直进行到第 L 次($N=2^L$),第 L 次实际上是做两点 DFT,它只有加减运算。但是,为了比较并为了统一运算结构,我们仍然采用系数为 W_N^0 的蝶形运算来

表示,这 $N/2$ 个两点 DFT 的 N 个输出就是 $x(n)$ 的 N 点 DFT 的结果 $X(k)$ 。图 4-17 表示一个 $N=8$ 的完整的按频率抽选的 FFT 结构。

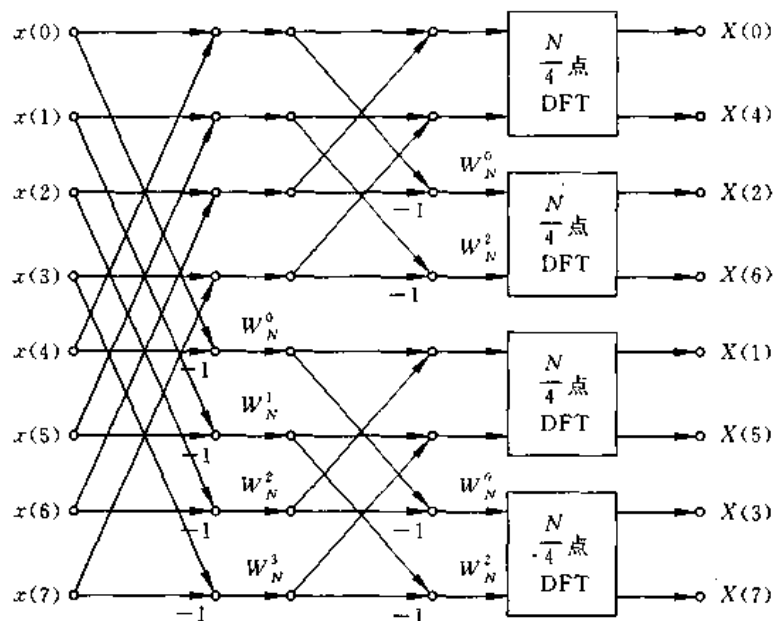


图 4-16 按频率抽选,将一个 N 点 DFT 分解为 4 个 $N/4$ 点 DFT ($N=8$)

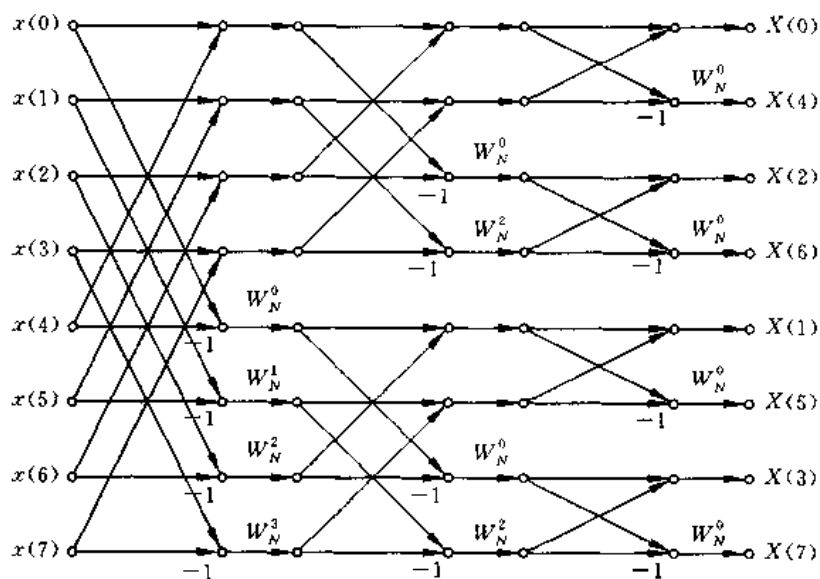


图 4-17 按频率抽选 FFT 流图 ($N=8$)

二、原位运算

从图 4-17 可以看出,这种运算和按时间抽选法一样,是很有规律的,其每级(每列)计算都是由 $N/2$ 个蝶形运算构成,每一个蝶形结构完成下述基本迭代运算:

$$X_m(k) = X_{m-1}(k) + X_{m-1}(j)$$

$$X_m(j) = [X_{m-1}(k) - X_{m-1}(j)]W_N^r$$

式中 m 表示第 m 列迭代, k, j 为数据所在行数, 此式的蝶形运算如图 4-18 所示, 也是由一次复乘和两次复加组成。

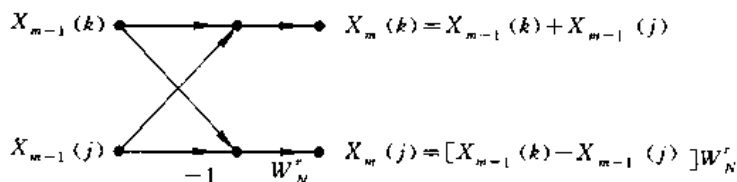


图 4-18 按频率抽选蝶形运算结构

从图 4-17 的流程图可以看出, 频率抽选 FFT 的这一流程图仍是原位运算的, 这里就不再讨论了。

三、蝶形运算两节点间的“距离”

从图 4-17 可以看出, 当计算第一级(列)蝶形时($m=1$), 一个蝶形的两节点“距离”为 4; 第二列时($m=2$), 蝶形的两节点“距离”为 2; 第三列时($m=3$), 蝶形的两节点“距离”为 1。由于 $N=2^L=2^3$, 故可推出蝶形的两节点“距离”为 $2^{L-m} = \frac{N}{2^m}$ (这可通过严格的数学推导加以证明, 这里不讨论)。

四、 W_N^r 的计算

由于对第 m 级计算, 一个 DIF 蝶形运算的两节点“距离”为 2^{L-m} , 因而第 m 级的一个蝶形计算可表示为

$$X_m(k) = X_{m-1}(k) + X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right)$$

$$X_m\left(k + \frac{N}{2^m}\right) = \left[X_{m-1}(k) - X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right)\right]W_N^r \quad (4-28)$$

现在问题是在不同级(m)情况下, 如何求解 r , 可以通过严格的数学推导得到 r , 这里我们只给出结论, 而省略掉推导过程。

r 的求解方法如下: ① 把(4-28)式中蝶形运算两节点中的第一个节点标号值, 即 k 值, 表示成 L 位二进制数; ② 将此二进制数乘上 2^{m-1} , 即将其左移 $(m-1)$ 位二进制数, 把右边空出的位置补零, 此数即为所求 r 的二进制数。

从图 4-17 看出, 其结果 W_N^r 因子, 第一列有 $N/2$ 种, 顺序为 $W_N^0, W_N^1, \dots, W_N^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}$, 第二列有两组, 每组为 $N/4$ 种, 顺序为 $W_N^0, W_N^2, \dots, W_N^{\left(\frac{N}{4}-2\right)}$ 。其余列可类推。

五、按频率抽选法与按时间抽选法的异同

由图 4-17 与图 4-5 相比较, 初看起来, DIF 法与 DIT 法的区别是: 图 4-17 的 DIF 输入是自然顺序, 输出是倒位序的, 这与图 4-5 的 DIT 法正好相反。但这不是实质性的区

别,因为 DIF 法与 DIT 法一样,都可将输入或输出进行重排,使二者的输入或输出顺序变成自然顺序或倒位序顺序。DIF 的基本蝶形(图 4-18)与 DIT 的基本蝶形(图 4-7)则有所不同,这才是实质的不同,DIF 的复数乘法只出现在减法之后,DIT 则是先作复乘后作加减法。

但是,DIF 与 DIT 就运算量来说则是相同的,即都有 L 级(列)运算,每级运算需 $N/2$ 个蝶形运算来完成,总共需要 $m_F = (N/2)\log_2 N$ 次复乘与 $a_F = N\log_2 N$ 次复加,DIF 法与 DIT 法都可进行原位运算。

表 4-3 原位运算 FFT 的特点($N=2^L$)

	按时间抽选(DIT)	
	输入自然数顺序、输出倒位序	输入倒位序、输出自然数顺序
蝶形结对偶节点距离	$2^{L-m} = \frac{N}{2^m}$	2^{m-1}
第 m 级计算蝶形结计算公式	$X_m(k) = X_{m-1}(k) + X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right)W_N^k$ $X_m\left(k + \frac{N}{2^m}\right) = X_{m-1}(k) - X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right)W_N^k$	$X_m(k) = X_{m-1}(k) + X_{m-1}(k + 2^{m-1})W_N^k$ $X_m(k + 2^{m-1}) = X_{m-1}(k) - X_{m-1}(k + 2^{m-1})W_N^k$
W_N^r 中 r 的求法	<p>将地址 k 除以 2^{L-m}(即右移 $(L-m)$ 位)然后位序颠倒。具体步骤如下:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 把 k 写成 L 位二进制数; 2. 将此二进制数右移 $(L-m)$ 位,把左边空出的位置补零; 3. 把已右移补零的二进制数位序颠倒,结果即为 r 值。 	<p>将地址 k 乘以 2^{L-m}(即左移 $(L-m)$ 位)。具体步骤如下:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 把 k 写成 L 位二进制数; 2. 将此二进制数左移 $(L-m)$ 位,把右边空出的位置补零,结果即为 r 值。
	按频率抽选(DIF)	
	输入自然顺序、输出倒位序	输入倒位序、输出自然数顺序
蝶形结对偶节点距离	$2^{L-m} = \frac{N}{2^m}$	2^{m-1}
第 m 段计算蝶形结计算公式	$X_m(k) = X_{m-1}(k) + X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right)$ $X_m\left(k + \frac{N}{2^m}\right) = \left[X_{m-1}(k) - X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right) \right] W_N^k$	$X_m(k) = X_{m-1}(k) + X_{m-1}(k + 2^{m-1})$ $X_m(k + 2^{m-1}) = \left[X_{m-1}(k) - X_{m-1}(k + 2^{m-1}) \right] W_N^k$
W_N^r 中 r 的求法	<p>将地址 k 乘以 2^{m-1}(即左移 $(m-1)$ 位)。具体步骤如下:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 把 k 写成 L 位二进制数; 2. 将此二进制数左移 $(m-1)$ 位,把右边空出的位置补零;结果即为 r 值。 	<p>将地址 k 除以 2^{m-1}(即右移 $(m-1)$ 位),然后位序颠倒。具体步骤如下:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 把 k 写成 L 位二进制数; 2. 将此二进制数右移 $(m-1)$ 位,把左边空出的位置补零; 3. 把已右移补零的二进制数位序颠倒,结果即为 r 值。

按时间抽选法与按频率抽选法基本蝶形的关系由图 4-7 与图 4-18 的基本蝶形运算看出,如果将 DIT 的基本蝶形加以转置,就得到 DIF 的基本蝶形,反过来将 DIF 的基本蝶形加以转置,就得到 DIT 的基本蝶形,因而 DIT 法与 DIF 法的基本蝶形是互为转置的。按照转置定理,两个流图的输入-输出特性必然相同。转置就是将流图的所有支路方向都反向,并且交换输入与输出,但节点变量值不交换,这样即可从图 4-7 得到图 4-18 或者从图 4-18 得到图 4-7,因而对每一种按时间抽选的 FFT 流图都存在一个按频率抽选的 FFT 流图。这样把图 4-5,图 4-10 到图 4-13 的流图分别加以转置,就可得到各种 DIF 的 FFT 流图,读者可做为练习,自己来画出这些流图。

综合上面的讨论,可以看出,由于输入输出是按自然顺序还是按倒位序排列的不同,有四种原位运算的 FFT 流图,按时间抽选法两种,按频率抽选法两种,我们把它们的蝶形结对偶节点距离、第 m 级运算中蝶形结的计算公式以及 W_N^r 中 r 的求法,列在表 4-3 中,供读者参考。

4.5 离散傅里叶反变换(IDFT)的快速计算方法

上面的 FFT 算法同样可以适用于离散傅里叶反变换(IDFT)运算,即快速傅里叶反变换(IFFT)。从 IDFT 公式

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (4-29)$$

与 DFT 公式

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (4-30)$$

的比较中可以看出,只要把 DFT 运算中的每一个系数 W_N^{nk} 换成 W_N^{-nk} ,最后再乘以常数 $1/N$,则以上所有按时间抽选或按频率抽选的 FFT 都可以拿来运算 IDFT。例如,我们可以直接由按频率抽选的流图(即图 4-17)出发,把 W_N^{nk} 换成 W_N^{-nk} ,并且在每列(级)运算中乘以 $1/2$ 因子(因为乘以 $1/N$ 等效于乘以 $1/N = 1/2^L = (1/2)^L$,故相当于每列都乘以 $1/2$ 因子),就可得到图 4-19 的 IFFT 流图。

上面这种 IFFT 算法虽然编程很方便,但是需要稍稍改动 FFT 的程序和参数才能实现。下面讨论一种完全不用改变 FFT 的程序就可以计算 IFFT 的方法。我们对 IDFT 公式(4-29)式取共轭

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}$$

因而

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \{ \text{DFT}[X^*(k)] \}^* \quad (4-31)$$

这说明,只要先将 $X(k)$ 取共轭,就可以直接利用 FFT 子程序,最后再将运算结果取一次共轭,并乘以 $1/N$,即得到 $x(n)$ 值。因此,FFT 运算和 IFFT 运算就可以共用一个子程序块,这样就方便了。

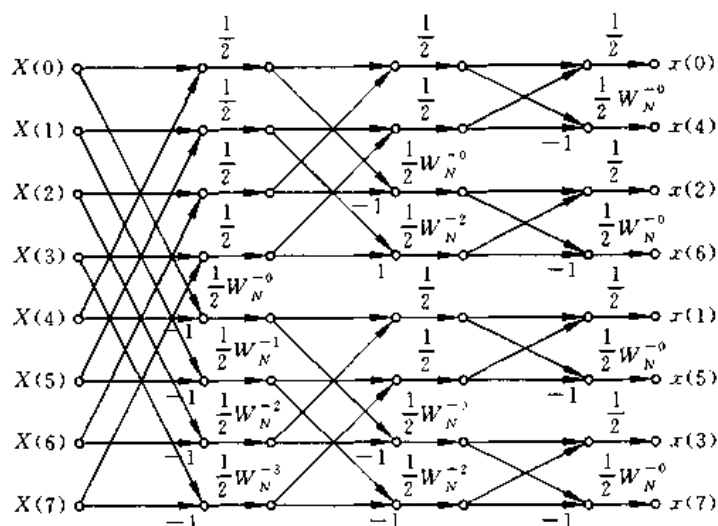


图 4-19 IFFT 流图($N=8$)

4.6 N 为复合数的 FFT 算法——混合基算法

上面讨论的是序列的点数为 $N=2^L$, 即以 2 为基数的 FFT 算法, 这种算法在实际中使用得最多, 因为它的程序简单, 效率高, 使用方便。

若不满足 $N=2^L$, 则可有以下几种办法:

(1) 将 $x(n)$ 补一些零值点的办法, 以使 N 增长到最邻近的一个 2^L 数值, 例如 $N=27$, 则在序列中可补进 $x(27)=x(28)=x(29)=x(30)=x(31)=0$ 等 5 个零值点, 使 N 达到 $N=2^5=32$ 。由 DFT 的性质知道, 有限长序列补零之后, 并不影响其频谱 $X(e^{j\omega})$, 只不过其频谱的抽样点数增加了, 上例中就是由 27 点增加到 32 点。所造成的结果是增加了计算量而已。但是, 有时计算量增加太多, 造成很大浪费。例如 $x(n)$ 的点数 $N=300$, 则须补到 $N=2^8=512$, 要补 212 个零值点。因而人们才研究 $N \neq 2^L$ 时的 FFT 算法。

(2) 如果要求准确的 N 点 DFT, 而 N 又是素数, 则只能采用直接 DFT 方法, 或者用后面将要介绍的 CZT(Chirp z 变换) 方法。

(3) 若 N 是一个复合数, 即它可以分解成一些因子的乘积, 则可以用 FFT 的一般算法, 即混合基 FFT 算法, 而基 2 算法只是这种一般算法的特例。

一、整数的多基多进制表示形式

(1) 对于二进制, $N=2^L$, 则任一个 $n < 2^L$ 的正整数 n 可以用 2 为基数表示成二进制形式 $(n_{L-1}n_{L-2}\cdots n_1n_0)$, 其中 n_i 为 0 或 1, $i=0, 1, \cdots, L-1$ 。这个二进制数所表示的数值为

$$(n)_{10} = n_{L-1}2^{L-1} + n_{L-2}2^{L-2} + \cdots + n_12 + n_0 \quad (4-32)$$

将此二进制数倒位序后成为 $[\rho(n)]_2 = (n_0n_1\cdots n_{L-2}n_{L-1})_2$, 其所代表的数值为

$$[\rho(n)]_{10} = n_02^{L-1} + n_12^{L-2} + \cdots + n_{L-2}2 + n_{L-1} \quad (4-33)$$

(2) 对于 r 进制(多进制), 设 $N=r^L$, r 和 L 皆为大于 1 的整数($r=2$ 时, 即为二进制), 则任一个 $n < 2^L$ 的正整数 n , 可以用 r 为基数表示成 r 进制形式 $(n_{L-1}n_{L-2}\cdots n_1n_0)_r$, 其中 $n_i=0, 1, \cdots, r-1, i=0, 1, \cdots, L-1$, 这个 r 进制数所表示的数值为

$$(n)_{10} = n_{L-1}r^{L-1} + n_{L-2}r^{L-2} + \cdots + n_1r + n_0 \quad (4-34)$$

将此 r 进制数倒位序后成为 $[\rho(n)]_r = (n_0n_1\cdots n_{L-2}n_{L-1})_r$, 其所代表的数值为

$$[\rho(n)]_{10} = n_0r^{L-1} + n_1r^{L-2} + \cdots + n_{L-2}r + n_{L-1} \quad (4-35)$$

(3) 对于多基多进制或称混合基, 这是最一般的情况, 可以包括上面两种单基的情况。此时 N 可表示成复合数 $N=r_1r_2\cdots r_L$, 则对于 $n < r_1r_2\cdots r_L$ 的任何一个正整数 n , 可以按 L 个基 r_1, r_2, \cdots, r_L 表示为多基多进制形式 $(n_{L-1}n_{L-2}\cdots n_1n_0)_{r_1r_2\cdots r_L}$, 这一多基多进制数所代表的数值为

$$(n)_{10} = n_{L-1}(r_2r_3\cdots r_L) + n_{L-2}(r_3r_4\cdots r_L) + \cdots + n_1r_L + n_0 \quad (4-36)$$

其倒位序形式为 $[\rho(n)]_{r_Lr_{L-1}\cdots r_2r_1} = (n_0n_1\cdots n_{L-2}n_{L-1})_{r_Lr_{L-1}\cdots r_2r_1}$, 它所代表的数值为

$$[\rho(n)]_{10} = n_0(r_1r_2\cdots r_{L-1}) + n_1(r_1r_2\cdots r_{L-2}) + \cdots + n_{L-2}r_1 + n_{L-1} \quad (4-37)$$

在这一多基多进制的表示中

$$\begin{aligned} n_0 &= 0, 1, \cdots, r_L - 1 \\ n_1 &= 0, 1, \cdots, r_{L-1} - 1 \\ &\vdots \\ n_{L-1} &= 0, 1, \cdots, r_1 - 1 \end{aligned}$$

可记为

$$n_i = 0, 1, \cdots, r_{L-i} - 1, \quad i = 0, 1, \cdots, L-1 \quad (4-38)$$

多基多进制(混合基)是最普遍的形式, 它包含了单基(二进制或多进制)形式。当 $r_1=r_2=\cdots=r_L=2$ 时, $N=2^L$ 为基 2 的二进制形式; 当 $r_1=r_2=\cdots=r_L=r$ 时, $N=r^L$ 为基 r 的 r 进制形式。

[例 4-1] $N=3 \times 5=r_1r_2$, 则有

$$\begin{aligned} (n)_{10} &= n_1r_2 + n_0 = 5n_1 + n_0 \\ [\rho(n)]_{10} &= n_0r_1 + n_1 = 3n_0 + n_1 \\ n_1 &= 0, 1, 2; \quad n_0 = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

其中
例如

$$\begin{aligned} (6)_{10} &= 5 \times 1 + 1 = (11)_{3 \times 5}, & [\rho(6)]_{10} &= 3 \times 1 + 1 = (4)_{10} \\ (2)_{10} &= 5 \times 0 + 2 = (02)_{3 \times 5}, & [\rho(2)]_{10} &= 3 \times 2 + 0 = (6)_{10} \end{aligned}$$

[例 4-2] $N=4 \times 4=r_1r_2$, 则有

$$\begin{aligned} (n)_{10} &= n_1r_2 + n_0 = 4n_1 + n_0 \\ [\rho(n)]_{10} &= n_0r_1 + n_1 = 4n_0 + n_1 \\ n_1 &= 0, 1, 2, 3; \quad n_0 = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

其中
例如

$$\begin{aligned} (3)_{10} &= 4 \times 0 + 3 = (03)_{4 \times 4}, & [\rho(3)]_{10} &= 4 \times 3 + 0 = (12)_{10} \\ (7)_{10} &= 4 \times 1 + 3 = (13)_{4 \times 4}, & [\rho(7)]_{10} &= 4 \times 3 + 1 = (13)_{10} \\ (14)_{10} &= 4 \times 3 + 2 = (32)_{4 \times 4}, & [\rho(14)]_{10} &= 4 \times 2 + 3 = (11)_{10} \end{aligned}$$

[例 4-3] $N=4 \times 3 \times 2=r_1 r_2 r_3$, 则有

$$(n)_{10} = n_2 r_2 r_3 + n_1 r_3 + n_0 = 6n_2 + 2n_1 + n_0$$

$$[\rho(n)]_{10} = n_0 r_1 r_2 + n_1 r_1 + n_2 = 12n_0 + 4n_1 + n_2$$

其中 $n_2=0,1,2,3; \quad n_1=0,1,2; \quad n_0=0,1$

例如

$$(5)_{10} = 6 \times 0 + 2 \times 2 + 1 = (021)_{4 \times 3 \times 2}, \quad [\rho(5)]_{10} = 12 \times 1 + 4 \times 2 + 0 = (20)_{10}$$

$$(14)_{10} = 6 \times 2 + 2 \times 1 + 0 = (210)_{4 \times 3 \times 2}, \quad [\rho(14)]_{10} = 12 \times 0 + 4 \times 1 + 2 = (6)_{10}$$

$$(21)_{10} = 6 \times 3 + 2 \times 1 + 1 = (311)_{4 \times 3 \times 2}, \quad [\rho(21)]_{10} = 12 \times 1 + 4 \times 1 + 3 = (19)_{10}$$

二、 $N=r_1 r_2$ 的快速算法

1. 算法原理

要计算的 N 点 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (4-39)$$

设 N 是一个复合数 $N=r_1 r_2$, 按上面讨论, 可将 $n(n < N)$ 的数用下面的公式表达:

$$n = n_1 r_2 + n_0, \begin{cases} n_1 = 0, 1, \dots, r_1 - 1 \\ n_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1 \end{cases} \quad (4-40)$$

同样, 若令 $N=r_2 r_1$, 则可将频率变量 $k(k < N)$ 用下式表达:

$$k = k_1 r_1 + k_0, \begin{cases} k_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1 \\ k_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1 \end{cases} \quad (4-41)$$

这样的表达式, n 为 r_2 进制数, n_0 为末位, n_1 为其进位, k 为 r_1 进制数, k_0 为其末位, k_1 为其进位。实际上是将原来的序号 n, k 用矩阵形式来表示, 用下面例子来加以说明, 设 $r_1=4, r_2=2$, 则

$$N = r_1 r_2 = 4 \times 2 = 8$$

那么

$$n = 2n_1 + n_0, \begin{cases} n_1 = 0, 1, 2, 3 \\ n_0 = 0, 1 \end{cases}$$

所以

$$n = \{n_0, 2+n_0, 4+n_0, 6+n_0\} = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$$

则可以把 n_0 看成列序号, 而 n_1 则可看成行序号, $r_2=2$ 为列的数目, $r_1=4$ 为行的数目, 按 (4-40) 式组合这两变量, 就得到单一的变量 $n(n=0,1,\dots,N-1)$, 如表 4-4 的排列。

表 4-4 $N=8=4 \times 2$ 时, 将 n 排列为矩阵形式

n $n_1 \backslash n_0$		0	1
0	0	0	1
1	1	2	3
2	2	4	5
3	3	6	7

同样,若 $N=r_2 r_1=2 \times 4$, 则

$$k = 4k_1 + k_0, \begin{cases} k_1 = 0, 1 \\ k_0 = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

所以

$$k = \{k_0, 4+k_0\} = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$$

这时, k_1 为变换后的列变量, k_0 为行变量, $r_2=2$ 为列的数目, $r_1=4$ 为行的数目, 按(4-41)式组合这两变量, 就得到单一的变量 $k(k=0, 1, \dots, N-1)$ 。

将(4-40)式与(4-41)式代入(4-39)式, 可得

$$\begin{aligned} X(k) &= X(r_1 k_1 + k_0) = X(k_1, k_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(r_2 n_1 + n_0) W_N^{(r_2 n_1 + n_0)(r_1 k_1 + k_0)} \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) W_N^{r_2 n_1 k_0} W_N^{r_1 n_0 k_1} W_N^{n_0 k_0} W_N^{r_2 n_1 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) W_N^{r_2 n_1 k_0} W_N^{r_1 n_0 k_1} W_N^{n_0 k_0} \end{aligned} \quad (4-42)$$

上面推导中应用了 $W_N^{r_2 n_1 k_1} = W_{r_1}^{r_2 n_1 k_1} = 1$ 的结果, 这里 n 是用 n_1 和 n_0 表示的, 所以要对 n_1 和 n_0 的所有位求和, 所以 n 的单求和号变成了 n_1 和 n_0 的两个求和号。

(4-42)式可进一步表示为

$$\begin{aligned} X(k_1, k_0) &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \left\{ \left[\sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) W_N^{r_2 n_1 k_0} \right] W_N^{n_0 k_0} \right\} W_N^{r_1 n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \left\{ \left[\sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) W_{r_1}^{n_1 k_0} \right] W_N^{n_0 k_0} \right\} W_{r_2}^{n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} [X_1(k_0, n_0) W_N^{n_0 k_0}] W_{r_2}^{n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} X'_1(k_0, n_0) W_{r_2}^{n_0 k_1} = X_2(k_0, k_1) \end{aligned} \quad (4-43)$$

注意, 表达式中 $x(n_1, n_0)$ 表示 $x(n)$ 的 n 为 r_2 进制顺序排列, $X(k_1, k_0)$ 表示 $X(k)$ 的 k 为 r_1 进制顺序排列, 而 $x(n_0, n_1)$ 则应表示 $x(n)$ 的 n 为 r_2 进制倒位序排列, $X(k_0, k_1)$ 则应表示 $X(k)$ 的 k 为 r_1 进制倒位序排列。式中

$$X_1(k_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) W_{r_1}^{n_1 k_0}, \quad k_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1 \quad (4-44)$$

$$X'_1(k_0, n_0) = X_1(k_0, n_0) W_N^{n_0 k_0} \quad (4-45)$$

$$X_2(k_0, k_1) = \sum_{n_0=0}^{r_2-1} X'_1(k_0, n_0) W_{r_2}^{n_0 k_1}, \quad k_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1 \quad (4-46)$$

$$X(k_1, k_0) = X_2(k_0, k_1) \quad (4-47)$$

(4-44)式表示 n_0 为参量时 ($n_0=0,1,\dots,r_2-1$) 输入变量 n_1 与输出变量 k_0 之间的 r_1 点 DFT, 总共有 r_2 个 (n_0 的数目) r_1 点 DFT, 而 $X_1(k_0, n_0)$ 的序列值为 $r_2 \times r_1 = N$ 。(4-45) 式表示 (4-44) 式的 $X_1(k_0, n_0)$ 乘以 $W_N^{n_0 k_0}$ 因子所组成的新序列 $X'_1(k_0, n_0)$, $W_N^{n_0 k_0}$ 称为旋转因子 (twiddle factor)。(4-46) 式表示 k_0 为参量时 ($k_0=0,1,\dots,r_1-1$) 输入变量 n_0 与输出变量 k_1 之间的 r_2 点 DFT, 总共有 r_1 个 (k_0 的数目) r_2 点 DFT, 而 $X_2(k_0, k_1)$ 的序列值为 $r_1 \times r_2 = N$ 。同时可以看出, $X_2(k_0, k_1)$ 中的变量是按 r_1 进位制倒位序排列的。(4-47) 式则表示, 最后要利用 $k=r_1 k_1 + k_0$ 进行整序, 以恢复出 $X(k_1, k_0) = X(k)$ 。

因而可将 N 为复合数 $N=r_1 r_2$ 的 DFT 算法的步骤归纳如下:

(1) 将 $x(n)$ 改写成 $x(n_1, n_0)$, 利用

$$x(n) = x(r_2 n_1 + n_0) = x(n_1, n_0), \quad \begin{cases} n_1 = 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1 \\ n_0 = 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1 \end{cases}$$

(2) 利用 (4-44) 式, 做 r_2 个 r_1 点 DFT, 得 $X_1(k_0, n_0)$ 。

(3) 利用 (4-45) 式, 把 N 个 $X_1(k_0, n_0)$ 乘以相应的旋转因子 $W_N^{n_0 k_0}$, 组成 $X'_1(k_0, n_0)$ 。

(4) 利用 (4-46) 式, 做 r_1 个 r_2 点 DFT, 得 $X_2(k_0, k_1)$ 。

(5) 利用 (4-47) 式, 进行整序, 得到 $X(k_1, k_0) = X(k)$, 其中 $k=r_1 k_1 + k_0$ 。

对于 $N=r_1 r_2=4 \times 2=8$ (其中 $r_1=4, r_2=2$) 的例子, 重写 n 和 k 的表达式为

$$\begin{aligned} n &= 2n_1 + n_0, & \begin{cases} n_1 = 0, 1, 2, 3 \\ n_0 = 0, 1 \end{cases} \\ k &= 4k_1 + k_0, & \begin{cases} k_1 = 0, 1 \\ k_0 = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

则 (4-44) 式变成

$$X_1(k_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^3 x(n_1, n_0) W_4^{n_1 k_0}$$

此式有两组 (对应于 $n_0=0,1$) 4 点 DFT。(4-45) 式与 (4-46) 式分别变成

$$X'_1(k_0, n_0) = X_1(k_0, n_0) W_8^{n_0 k_0}$$

$$X_2(k_0, k_1) = \sum_{n_0=0}^1 X'_1(k_0, n_0) W_2^{n_0 k_1}$$

后一式子共有四组 (对应于 $k_0=0,1,2,3$) 2 点 DFT。(4-47) 式变成

$$X(k_1, k_0) = X_2(k_0, k_1)$$

这样, 我们可以得到 $N=4 \times 2=8$ 的流图, 如图 4-20 所示。图中省略了一个 4 点 DFT 的流图, 读者可利用上面分析的方法自行画出。

另外, 还可以采用先乘旋转因子再算 DFT 的算法, 即可表示为

$$X(k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^{r_2-1} W_{r_2}^{k_1 n_0} \sum_{n_1=0}^{r_1-1} [x(n_1, n_0) W_N^{k_0 n_0}] W_{r_1}^{k_0 n_1} \quad (4-48)$$

此式和 (4-43) 式不同之处是, 首先把时间序列乘以旋转因子 $W_N^{k_0 n_0}$, 然后计算 r_1 点 (k_0, n_1) 的 DFT, 再计算 r_2 点 (k_1, n_0) 的 DFT。这里是序列先乘 $W_N^{k_0 n_0}$, 这正反映了按时间抽选, (4-43) 式是先作变换再乘 $W_N^{k_0 n_0}$, 正反映了按频率抽选。

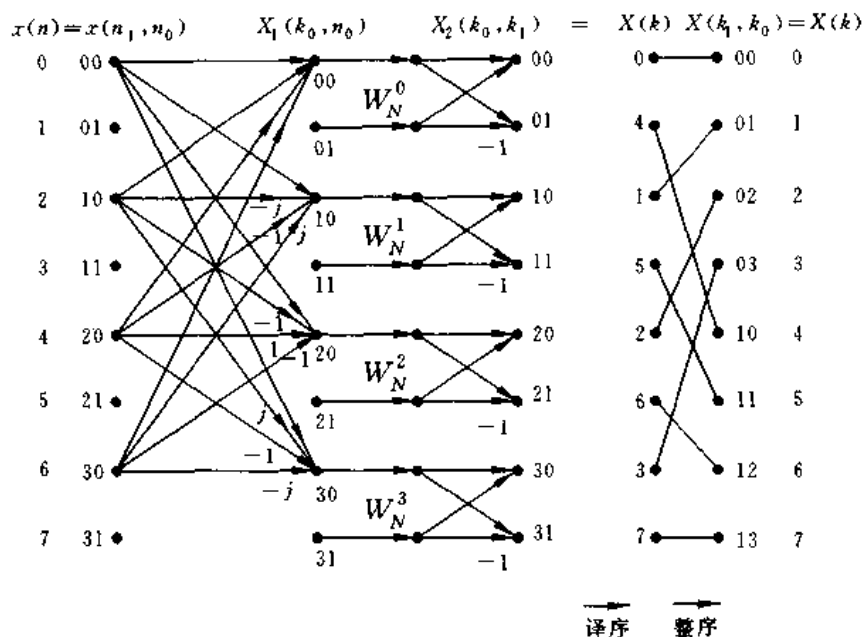


图 4-20 $N=4 \times 2=8$ 的 FFT 运算流图(只画了一部分)

上面讨论的是 $N=r_1 r_2$ 即 N 分解为两个素数的情况。若 N 为高组合素数, 则可按上述方法连续地分解为小点数的 DFT, 如 $N=r_1 M, M=r_2 r_3$, 则 $N=r_1 r_2 r_3$, 用以上办法仍可导出其流图。

前面已讲过, $N=2^L$ 的 FFT 称为基-2 FFT。更一般的情况是, N 是一个复合数, 可以分解为一些因子的乘积, 即

$$N = r_1 r_2 r_3 \cdots r_L$$

但是分解方法不是惟一的, 例如

$$30 = 2 \times 3 \times 5 = 5 \times 3 \times 2 = 5 \times 6 = 3 \times 10$$

当 $r_1=r_2=\cdots=r_L$ 时, $N=r^L$, 则可通过 L 级 r 点的 DFT 来实现 N 点 DFT, 称之为基- r 算法, $r=2$ 时称基-2 算法, $r=4$ 时称基-4 算法。当 $N=r_1 r_2 \cdots r_L$, 而各 r_i 不不同时, 则称为混合基 FFT 算法, 或称基- $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_L$ 算法。

计算机中采用基-2 或基-4 算法更为方便, 且运算量较小, 因而特别为人们所重视。

2. N 为复合数时 FFT 运算量的估计

当 $N=r_1 r_2$ 时, 如果不算译序、整序的工作量, 由(4-44)式到(4-46)式可看出, 其运算量为

$$\text{直接法求 } r_2 \text{ 个 } r_1 \text{ 点 DFT: } \begin{cases} \text{复数乘法} & r_2 r_1^2 \\ \text{复数加法} & r_2 r_1 (r_1 - 1) \end{cases}$$

乘 N 个旋转因子: 复数乘法 N

$$\text{直接法求 } r_1 \text{ 个 } r_2 \text{ 点 DFT: } \begin{cases} \text{复数乘法} & r_1 r_2^2 \\ \text{复数加法} & r_1 r_2 (r_2 - 1) \end{cases}$$

总计: 复数乘法 $r_2 r_1^2 + N + r_1 r_2^2 = N(r_1 + r_2 + 1)$

复数加法 $r_2 r_1 (r_1 - 1) + r_1 r_2 (r_2 - 1) = N(r_1 + r_2 - 2)$

而直接计算一个 N 点 DFT 的运算量为

$$\begin{array}{ll} \text{复数乘法} & N^2 \\ \text{复数加法} & N(N-1) \end{array}$$

因而混合基算法可节省的运算量倍数为

$$\begin{array}{ll} \text{乘法} & R_x = \frac{N^2}{N(r_1 + r_2 + 1)} = \frac{N}{r_1 + r_2 + 1} \\ \text{加法} & R_+ = \frac{N(N-1)}{N(r_1 + r_2 - 2)} = \frac{N-1}{r_1 + r_2 - 2} \end{array} \quad (4-49)$$

例如, 当 $N = r_1 r_2 = 5 \times 7 = 35$ 时

$$R_x = \frac{35}{13} = 2.6$$

直接 DFT 算法等于混合基算法的 2.6 倍工作量。

同样, 当 $N = r_1 r_2 r_3$ 时, 一定有 $r_2 r_3$ 个 r_1 点 DFT, $r_1 r_3$ 个 r_2 点 DFT, $r_1 r_2$ 个 r_3 点 DFT, 加上两次乘旋转因子, 因而总乘法次数为 $N(r_1 + r_2 + r_3 + 2)$ 。

这样可以推算出, 当 $N = r_1 r_2 \cdots r_L$ 时, 采用混合基算法所需总乘法次数为

$$N \left[\left(\sum_{i=1}^L r_i \right) + L - 1 \right] \quad (4-50)$$

则直接计算 DFT 与之相比, 运算量之比为

$$R_x = \frac{N^2}{N \left[\left(\sum_{i=1}^L r_i \right) + L - 1 \right]} = \frac{N}{L - 1 + \sum_{i=1}^L r_i} \quad (4-51)$$

注意(4-50)式用于每个 r_i 均为素数(但 $\neq 2$)的情况是精确的, 此时可将 r_i 点变换看成乘法次数为 r_i^2 是对的, 但是当 r_i 不是素数或 $r_i = 2$ 时, 就不一定对了, 例如: $r_i = 2$ 时, 是两点变换不带有乘法运算, 对 $r_i = 4$ 也是这样, 对 $r_i = 8$, 则所需运算比 64 次乘法少得多, 所以分解成 r_i 为 2, 4, 8, 将使上面公式几乎失效, 也就是说 $N = 2^L$ 时, 上面(4-50)式完全不适用。

4.7 基-4 FFT 算法

当混合基 FFT 算法中的 $r_1 = r_2 = \cdots = r_L = 4$ 即 $N = 4^L$ 时就是基-4 FFT 算法。 n 和 k 以 4 进制数表示为

$$n = \sum_{i=0}^{L-1} n_i 4^i \quad n_i = 0, 1, 2, 3 \quad (4-52a)$$

$$k = \sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i \quad k_i = 0, 1, 2, 3 \quad (4-52b)$$

将上二式代入 DFT 表达式可得

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 \cdots \sum_{n_{L-1}=0}^3 x(n_{L-1}, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$nk = \left(\sum_{i=0}^{L-1} n_i 4^i \right) \left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i \right)$$

下面我们按时间抽选法为例进行讨论。此时应先将输入时间变量 n 加以分解,即

$$W_N^k = W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i\right) 4^{L-1} n_{L-1}} \cdot W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i\right) 4^{L-2} n_{L-2}} \cdots W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i\right) 4 n_1} \cdot W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i\right) n_0} \quad (4-54)$$

注意到 $N=4^L$, 则

$$W_N^k = W_N^{4^{L-1} k_0 n_{L-1}} \cdot W_N^{(4k_1+k_0) 4^{L-2} n_{L-2}} \cdots W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-2} k_i 4^i\right) 4 n_1} \cdot W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i\right) n_0} \quad (4-55)$$

把它代入(4-53)式,有

$$\begin{aligned} X(k) = & \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 \cdots \sum_{n_{L-1}=0}^3 x(n_{L-1}, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) W_N^{4^{L-1} k_0 n_{L-1}} \\ & \cdot W_N^{(4k_1+k_0) 4^{L-2} n_{L-2}} \cdots W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-2} k_i 4^i\right) 4 n_1} \cdot W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-1} k_i 4^i\right) n_0} \end{aligned} \quad (4-56)$$

于是,可由(4-56)式写出递推关系

$$\begin{aligned} X_1(k_0, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) &= \sum_{n_{L-1}=0}^3 x(n_{L-1}, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) W_N^{4^{L-1} k_0 n_{L-1}} \\ &= \sum_{n_{L-1}=0}^3 x(n_{L-1}, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) W_4^{k_0 n_{L-1}} \end{aligned} \quad (4-57)$$

这正是输入变量为 n_{L-1} 输出变量为 k_0 的 $x(n)$ 的 4 点 DFT。同样可得

$$\begin{aligned} X_2(k_0, k_1, n_{L-3}, \cdots, n_1, n_0) &= \sum_{n_{L-2}=0}^3 X_1(k_0, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) W_N^{4^{L-1} k_1 n_{L-2}} \cdot W_N^{4^{L-2} k_0 n_{L-2}} \\ &= \sum_{n_{L-2}=0}^3 [X_1(k_0, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0) W_N^{4^{L-2} k_0 n_{L-2}}] W_4^{n_{L-2} k_1} \end{aligned} \quad (4-58)$$

这是 $X_1(k_0, n_{L-2}, \cdots, n_1, n_0)$ 乘上一个旋转因子 $W_N^{4^{L-2} k_0 n_{L-2}}$ 后的 4 点 DFT(输入变量为 n_{L-2} , 输出变量为 k_1)。同样可得

$$\begin{aligned} X_3(k_0, k_1, k_2, n_{L-4}, \cdots, n_1, n_0) &= \sum_{n_{L-3}=0}^3 [X_2(k_0, k_1, n_{L-3}, \cdots, n_1, n_0) W_N^{4^{L-3} (4k_1+k_0) n_{L-3}}] W_4^{n_{L-3} k_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-59)$$

$$\begin{aligned} X_m(k_0, k_1, k_{m-1}, n_{L-m-1}, \cdots, n_1, n_0) &= \sum_{n_{L-m}=0}^3 [X_{m-1}(k_0, k_1, \cdots, k_{m-2}, n_{L-m}, \cdots, n_1, n_0) \cdot W_N^{4^{L-m} \left(\sum_{i=0}^{m-2} k_i 4^i\right) n_{L-m}}] W_4^{n_{L-m} k_{m-1}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-60)$$

$$X_L(k_0, k_1, \cdots, k_{L-2}, k_{L-1}) = \sum_{n_0=0}^3 [X_{L-1}(k_0, k_1, \cdots, k_{L-2}, n_0) \cdot W_N^{\left(\sum_{i=0}^{L-2} k_i 4^i\right) n_0}] W_4^{n_0 k_{L-1}} \quad (4-61)$$

可以看出,所得到的序列 $X_L(k_0, k_1, \cdots, k_{L-2}, k_{L-1})$ 的变量是 k_0 在最前, k_{L-1} 在最后,是倒位序的,将它按(4-52b)式加以整序即可得到变量 k 为正常顺序的输出,即

$$X(k) = X(k_{L-1}, k_{L-2}, \cdots, k_1, k_0) = X_L(k_0, k_1, \cdots, k_{L-2}, k_{L-1})$$

这就是基-4 FFT 的全部算法。为了直观起见,我们以 $N=16=4^2$ 为例,来看一看基-4 FFT 的基本运算公式和运算结构:

$$\begin{aligned} N &= 16 = 4^2, & \text{即 } L &= 2 \\ n &= 4n_1 + n_0 \\ k &= 4k_1 + k_0 \end{aligned} \quad (4-62)$$

则有

$$X(k) = \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 x(n_1, n_0) W_N^{4n_1 k_0} \cdot W_N^{n_0 k_0} \cdot W_N^{4n_0 k_1} \quad (4-63)$$

因而

$$X_1(k_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^3 x(n_1, n_0) W_4^{n_1 k_0} \quad (4-64)$$

$$X_2(k_0, k_1) = \sum_{n_0=0}^3 (X_1(k_0, n_0) W_N^{n_0 k_0}) W_4^{n_0 k_1} \quad (4-65)$$

整序后可得

$$X(k) = X(k_1, k_0) = X_2(k_0, k_1) \quad (4-66)$$

所以它的基本运算有三步。第一步是(4-64)式做 $x(n)$ 的 4 点 DFT(变量为 n_1, k_0),得到 $X_1(k_0, n_0)$;第二步是(4-65)式,将 $X_1(k_0, n_0)$ 乘旋转因子 $W_N^{n_0 k_0}$ 后作乘积的 4 点 DFT(变量为 n_0, k_1)得到 $X_2(k_0, k_1)$;第三步由于 $X_2(k_0, k_1)$ 的变量是 k_0 在前, k_1 在后,是基-4 倒位序的序列,因此,将其变量整序后得到正常顺序输出的序列 $X(k_1, k_0)$,如公式(4-66)所示。

下面,我们来讨论 $N=4^2$ 的基-4 FFT 的流图。它的基本运算是 4 点 DFT,以第一级为例,见(4-64)式, (n_1, k_0) 的 4 点 DFT 可表示成

$$\begin{aligned} X_1(0, n_0) &= W_4^0 x(0, n_0) + W_4^0 x(1, n_0) + W_4^0 x(2, n_0) + W_4^0 x(3, n_0) \\ X_1(1, n_0) &= W_4^0 x(0, n_0) + W_4^1 x(1, n_0) + W_4^2 x(2, n_0) + W_4^3 x(3, n_0) \\ X_1(2, n_0) &= W_4^0 x(0, n_0) + W_4^2 x(1, n_0) + W_4^4 x(2, n_0) + W_4^6 x(3, n_0) \\ &= W_4^0 x(0, n_0) + W_4^2 x(1, n_0) + W_4^0 x(2, n_0) + W_4^2 x(3, n_0) \\ X_1(3, n_0) &= W_4^0 x(0, n_0) + W_4^3 x(1, n_0) + W_4^4 x(2, n_0) + W_4^3 x(3, n_0) \\ &= W_4^0 x(0, n_0) + W_4^3 x(1, n_0) + W_4^2 x(2, n_0) + W_4^1 x(3, n_0) \end{aligned}$$

此式可写成矩阵形式,并考虑到 $W_4^0=1, W_4^1=-j, W_4^2=-1, W_4^3=j$,则有

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (k_0) & & (n_1) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} X_1(0, n_0) \\ X_1(1, n_0) \\ X_1(2, n_0) \\ X_1(3, n_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, n_0) \\ x(1, n_0) \\ x(2, n_0) \\ x(3, n_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, n_0) \\ x(1, n_0) \\ x(2, n_0) \\ x(3, n_0) \end{bmatrix} \quad (4-67) \end{aligned}$$

我们知道,基-2的同址运算在其输入与输出中必须有一个是二进制倒位序列排列的。为了使用基-2同址运算的流图,我们将(4-67)式的输出中已算出的变量 k_0 的四进制数(0, 1, 2, 3)按二进制倒位序排列成为(0, 2, 1, 3),则可得

$$\begin{bmatrix} X_1(0, n_0) \\ X_1(2, n_0) \\ X_1(1, n_0) \\ X_1(3, n_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, n_0) \\ x(1, n_0) \\ x(2, n_0) \\ x(3, n_0) \end{bmatrix} \quad (4-68)$$

由(4-68)式可画出图 4-21 的流图,这是同址运算的,而且和基-2 FFT 相似,基本的运算也是 2 点 DFT 的蝶形结。在这个基本的基-4 FFT 流图中是完全不需要复数乘法的,乘 j (或 $-j$)只需将实部虚部交换,再视是 $+j$ 或 $-j$ 加上必要的正、负号即可,例如

$$j(a + jb) = -b + ja, \quad -j(a + jb) = b - ja$$

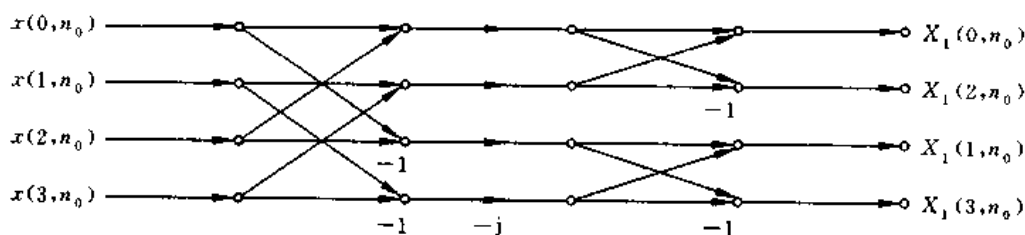


图 4-21 一个基-4 FFT 基本运算的信号流图

第二级运算见(4-65)式,只需将第一级的结果乘以旋转因子,即 $X_1(k_0, n_0)W_N^{n_0 k_0}$,然后再作 (n_0, k_1) 的 4 点 DFT 即可。推导如下:由(4-65)式可写成矩阵形式

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (k_1) \\ \begin{bmatrix} X_2(k_0, 0) \\ X_2(k_0, 1) \\ X_2(k_0, 2) \\ X_2(k_0, 3) \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} (n_0) \\ \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} X_1(k_0, 0)W_{16}^0 \\ X_1(k_0, 1)W_{16}^{k_0} \\ X_1(k_0, 2)W_{16}^{2k_0} \\ X_1(k_0, 3)W_{16}^{3k_0} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k_0, 0)W_{16}^0 \\ X_1(k_0, 1)W_{16}^{k_0} \\ X_1(k_0, 2)W_{16}^{2k_0} \\ X_1(k_0, 3)W_{16}^{3k_0} \end{bmatrix} \quad (4-69) \end{aligned}$$

同样,将刚求出的四进制变量 $k_1(0, 1, 2, 3)$ 按二进制倒位序排列成(0, 2, 1, 3),以使用基-2的同址运算蝶形结表示,这样即可得到

$$\begin{bmatrix} X_2(k_0, 0) \\ X_2(k_0, 2) \\ X_2(k_0, 1) \\ X_2(k_0, 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k_0, 0)W_{16}^0 \\ X_1(k_0, 1)W_{16}^{k_0} \\ X_1(k_0, 2)W_{16}^{2k_0} \\ X_1(k_0, 3)W_{16}^{3k_0} \end{bmatrix} \quad (4-70)$$

可以看出, (4-70) 式的基本流图和第一级运算时的基本流图是一样的, 只不过输入数据要先乘以 $W_{16}^{n_0 k_0}$ 。

综上所述, 我们可画出 $N=16=4^2$ 时的基-4 FFT 的按时间抽选、输入正常顺序、输出四进制倒位序的流图, 如图 4-22 所示(输出数据实际上也是按二进制倒位序排列)。

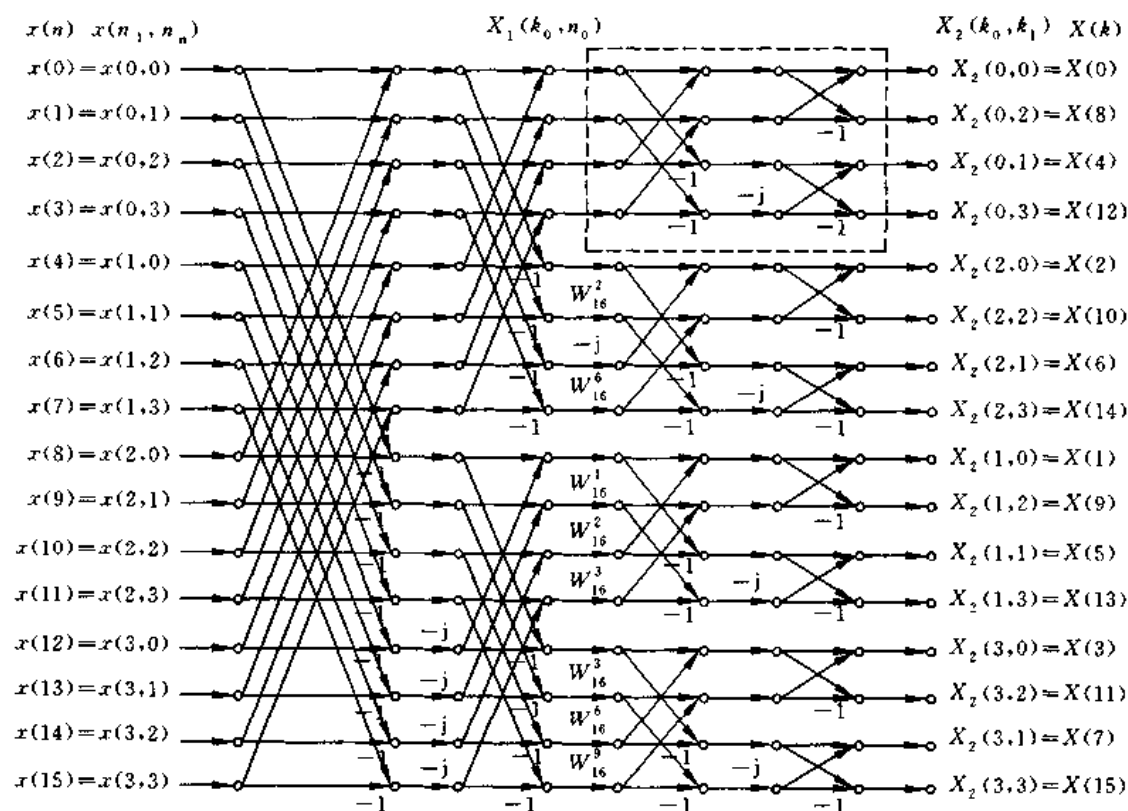


图 4-22 按时间抽选基-4 FFT 流图

(输入正常顺序排列, 输出四进制倒位序排列, 也是二进制倒位序排列。用虚线所示部分为一个基-4 FFT 流图)

下面讨论基-4 FFT 运算的次数。前面已谈到, 每个基本的 4 点 FFT 都不需要乘法, 算法中只有乘旋转因子才有复数乘法, 而每一个 4 点 DFT 只有 3 次乘旋转因子(有一个旋转因子 $W_N^0=1$, 不需要乘)。而每一级(基-4 FFT 的一级)有 $N/4$ 个 4 点 DFT, 因而每级总共需要 $3 \times N/4$ 次复乘, 由于 $N=4^L$, 则共有 L 级, 但由于这里第一级运算不乘旋转因子, 因而总的复乘次数(考虑到 $N=4^L=2^{2L}$)为

$$\frac{3}{4}N(L-1) = \frac{3}{4}N\left(\frac{1}{2}\log_2 N - 1\right) \doteq \frac{3}{8}N\log_2 N, \quad L \gg 1 \quad (4-71)$$

已知基-2 FFT 的复乘次数为

$$\frac{N}{2}\log_2 N$$

因此, 基-4 FFT 比基-2 FFT 乘法运算量更加节省。实际上, 一些特定的旋转因子不必相乘(当然基-2 FFT 也有这种情况), 例如 $N=16$ 时, $W_{16}^4 = -j$ 就不必相乘。由图 4-22 可看出, $N=16$ 时, 基-4 FFT 实际上只需要 8 次复乘。

由于所需蝶形结和基-2 FFT 时一样多,因而基-4 FFT 所需复加次数和基-2 FFT 完全一样,也是 $N \log_2 N$ 次。

图 4-22 中有基-4 FFT 的倒位序关系,以 $N=16=4^2$ 为例,有

$$n = (n_1, n_0)_{4 \times 4}, n_0 = 0, 1, 2, 3$$

n 所代表的十进制数为 $n = 4n_1 + n_0$, n 的四进制倒位序数为 $\bar{n} = (n_0, n_1)$,它所代表的十进制数为 $\bar{n} = 4n_0 + n_1$,因而 n 和 \bar{n} 可列表表示如下:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(n_1, n_0)	00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
\bar{n}	0	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
(n_0, n_1)	00	10	20	30	01	11	21	31	02	12	22	32	03	13	23	33

4.8 分裂基 FFT 算法

从基-2 按时间和按频率抽选的推导过程中(见图 4-2、图 4-3 及图 4-15、图 4-16)看出,每级抽选时,每一组的偶序号部分(时间抽选看输入序号,频率抽选看输出序号)都不乘旋转因子,乘旋转因子都出现在奇序号上,加之考虑到基-4 FFT 算法比基-2 FFT 算法更有效(节约运算量),有人在 1984 年提出了“分裂基”算法。该算法的基本想法是对偶序号使用基-2 FFT 算法,对奇序号使用基-4 FFT 算法。就目前所知,分裂基 FFT 算法是在针对 $N=2^L$ 的算法中具有最少乘法次数,且具有基-2 FFT 算法同样好的同址运算结构,因此被认为是最好的 FFT 算法。下面来研究这一算法。

分裂基 FFT 算法和基-2 FFT 算法情况一样,要求 N 为 2 的整幂次,即 $N=2^L$ (L 为正整数),有

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

将 $x(n)$ 分成三个子序列

$$\left. \begin{aligned} x_1(r) &= x(2r), & 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1 \\ x_2(l) &= x(4l+1) \\ x_3(l) &= x(4l+3) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq l \leq \frac{N}{4} - 1$$

则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4l+1) W_N^{(4l+1)k} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4l+3) W_N^{(4l+3)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(l) W_{N/4}^{lk} + W_N^{3k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) + W_N^{3k} X_3(k) \end{aligned} \quad (4-72)$$

其中

$$X_1(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l) W_{N/2}^{rk} \quad (4-73)$$

$$X_2(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+1) W_{N/4}^{lk} \quad (4-74)$$

$$X_3(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x(4l+3) W_{N/4}^{lk} \quad (4-75)$$

这里, $X_1(k)$ 为偶序号的 $x(n)$ 组成的 $N/2$ 点 DFT, $X_2(k), X_3(k)$ 为奇序号的 $x(n)$ 组成的 $N/4$ 点 DFT, 而 $X(k)$ 为 N 点 DFT。因而要利用周期性的关系, 即

$$X_1(k) = X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1\left(k + m \frac{N}{2}\right) \quad (4-76)$$

$$X_2(k) = X_2\left(k + \frac{N}{4}\right) = X_2\left(k + m \frac{N}{4}\right) \quad (4-77)$$

$$X_3(k) = X_3\left(k + \frac{N}{4}\right) = X_3\left(k + m \frac{N}{4}\right) \quad (4-78)$$

其中 m 为整数。将 $X(k)$ 分成四段讨论, 有

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) + W_N^{3k} X_3(k) \\ X\left(k + \frac{N}{4}\right) &= X_1\left(k + \frac{N}{4}\right) - j W_N^k X_2(k) + j W_N^{3k} X_3(k) \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) - W_N^{3k} X_3(k) \\ X\left(k + \frac{3}{4}N\right) &= X_1\left(k + \frac{N}{4}\right) + j W_N^k X_2(k) - j W_N^{3k} X_3(k) \end{aligned} \right\} 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \quad (4-79)$$

(4-79) 式的基本关系可用图 4-23 所示。也就是说, 分裂基 FFT 算法的基本蝶形运算可用图 4-24 所示。

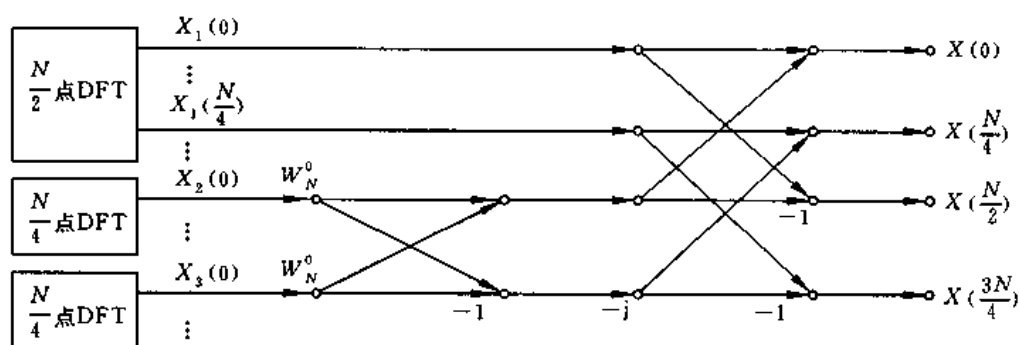


图 4-23 分裂基 FFT 算法(时间抽选)的第一级流图

我们可用同样的办法对 $X_1(k), X_2(k), X_3(k)$ 作第三级分解, 例如对 $X_1(k)$ 的输入 $x_1(r)$ ($N/2$ 点序列), 把 r 为偶序号的 $x_1(r)$ 作 $\frac{N/2}{2} = \frac{N}{4}$ 点 DFT, 把 r 为奇序号的 $x_1(r)$ 作

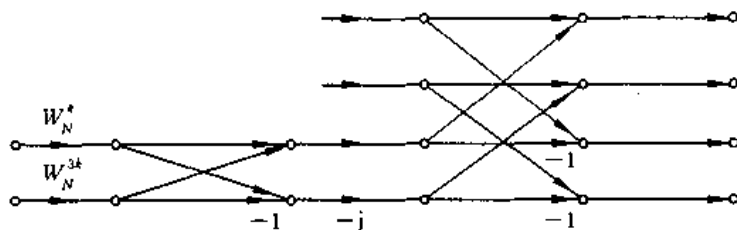


图 4-24 分裂基 FFT 算法的一个基本蝶形运算

$\frac{N/2}{4} = \frac{N}{8}$ 点 DFT。对 $X_2(k), X_3(k)$ (皆为 $\frac{N}{4}$ 点 DFT) 做同样的处理。

以 $N=4^2=16$ 为例, $X(k)$ 的第一级的分解可以得到 4 个分裂基, $X_1(k)$ 的第二级的分解可以得到 2 个分裂基, 一个基-4 的 4 点 DFT 和 2 个基-2 的 2 点 DFT, 而 $X_2(k)$ 和 $X_3(k)$ 的第二级的分解分别是基-4 的 4 点 DFT。对 $N=2^4$ 的分裂基 FFT 的示意图如图 4-25 所示。

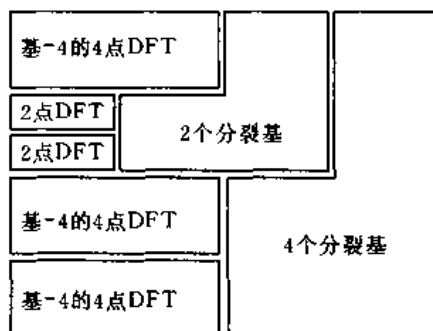


图 4-25 $N=2^4=16$ 点的分裂基 FFT 的示意图

这样, 我们可画出 $N=4^2=16$ 的分裂基 FFT 算法 (按时间抽选) 的流图, 如图 4-26 所示。应注意, 这里推导分裂基 FFT 算法时, 是按 n 的奇偶来划分子序列的, 所以这种算法的流图的输入序列的排列次序是基-2 算法的倒位序。

下面来讨论运算量。我们知道, 基-2、基-4 的基本蝶形结是没有乘法的, 而一个分裂基蝶形有两次复乘, 因而复乘的次数与基本分裂基蝶形个数有关。当

$$l=2, N=2^2=4 \text{ 时, 分裂基蝶形数为 } B_2=0$$

$$l=3, N=2^3=8 \text{ 时, 分裂基蝶形数为 } B_3=2$$

$$l=4, N=2^4=16 \text{ 时, 分裂基蝶形数为 } B_4=B_3+2^{l-2}+2B_2=B_3+4=6$$

$$l=5, N=2^5=32 \text{ 时, 分裂基蝶形数为 } B_5=B_4+2^{l-2}+2B_3=18$$

也就是说, 如果 $N=2^l$, 用分裂基算法, 它所具有的分裂基蝶形数用 B_l 表示, 则有以下递推关系:

$$B_l = 2^{l-2} + B_{l-1} + 2B_{l-2} \quad (4-80)$$

起始条件为 $B_2=0, B_3=2$, 递推可得 $B_4=6, B_5=18$ 等。我们把 $N=2^l$ 和 B_l 以及 M_l (复乘次数 $M_l=2B_l$) 的关系按递推关系求出来并放在表 4-5 中。

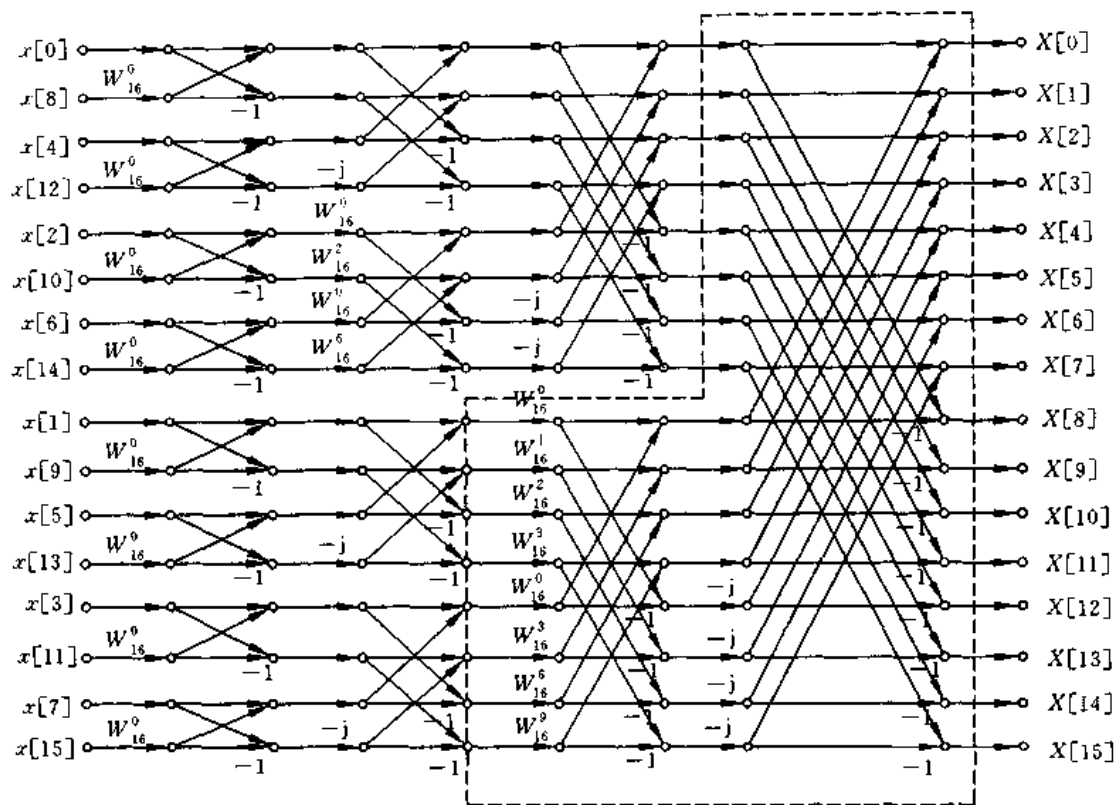


图 4-26 $N=2^4=16$ 分裂基 FFT 算法(按时间抽选)的流图

(输入二进制倒位序, 输出正常顺序)

注: 上图只用虚线框表示了一级的倒 L 结构

表 4-5 分裂基 FFT 的复乘次数 M_l 及所含分裂基蝶形数 B_l

l	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N=2^l$	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
B_l	0	2	6	18	46	114	270	626	1422
M_l	0	4	12	36	92	228	540	1252	2844

注: l 再增加(大于 10), 可利用(4-80)式递推求得 B_l, M_l 值。

我们知道, 每个分裂基蝶形结有两次复乘, 当 l 为不同数值时, 复乘次数 M_l 也列在表中。当然, 真正的复乘次数比表上的要少, 例如, $W_N^0=1$ 不必作乘法, 可以减少乘法次数。

从表 4-5 可看出, 所需乘法次数比 $\frac{1}{3}N\log_2 N$ 还要少。例如 $N=64$, 则 $\frac{1}{3}N\log_2 N = \frac{64}{3} \times 6 = 128$, 而 $M_l = 92 < 128$ 。其他 N 也是这样。而 $N=64$ 时基-2 算法复乘次数为 $\frac{N}{2}\log_2 N = 192$, 所以分裂基算法比基-2 算法运算量少。同样, 基-4 算法复乘次数为 $\frac{3}{8}N\log_2 N$, 比分裂基算法的复乘次数稍多。

上面讨论的是按时间抽选的情况,当然也可按频率抽选来分析分裂基 FFT 算法,请读者自行推导。

4.9 线性调频 z 变换(Chirp- z 变换)算法

前面已讲过,采用 FFT 算法可以很快算出全部 DFT 值,也就是算出有限长序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上 N 个等间隔抽样点 z_k 处的抽样值。它要求 N 为高度复合数。

实际上常常只对信号的某一频段感兴趣,也就是只需要计算单位圆上某一段的频谱值,例如对窄带信号就是这样,希望在窄带频带内频率的抽样能够非常密集,提高分辨率,带外则不予考虑,如果用 DFT 方法,则需增加频域抽样点数,增加了窄带之外不需要的计算量。另外,有时也对非单位圆上的抽样感兴趣,例如语音信号处理中,常常需要知道其 z 变换的极点所在处的复频率,如果极点位置离单位圆较远,只利用单位圆上的频谱,就很难知道极点所在处的复频率,此时就需要抽样点在接近这些极点的曲线上。再有,如果 N 是大素数时,不能加以分解,如何有效计算这种序列的 DFT。从以上三方面看, z 变换采用螺旋线抽样就适应于这些需要,它可用 FFT 来快速计算。这种变换称为线性调频 z 变换(简称 CZT),它是适用于这种更为一般情况下由 $x(n)$ 求 $X(z_k)$ 的快速变换算法。

一、算法的基本原理

已知 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 是有限长序列,其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (4-81)$$

为适应 z 可以沿 z 平面更一般的路径取值,故沿 z 平面上的一段螺旋线作等分角的抽样, z 的这些抽样点 z_k 为

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4-82)$$

M 为所要分析的复频谱的点数,不一定等于 N , A 和 W 都是任意复数,可表示为

$$A = A_0 e^{j\theta_0} \quad (4-83)$$

$$W = W_0 e^{-j\theta_0} \quad (4-84)$$

将(4-83)式与(4-84)式代入(4-82)式,可得

$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\theta_0} = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\theta_0)} \quad (4-85)$$

因此

$$z_0 = A_0 e^{j\theta_0}, z_1 = A_0 W_0^{-1} e^{j(\theta_0 + \theta_0)}, \dots$$

$$z_k = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\theta_0)}, \dots$$

$$z_{M-1} = A_0 W_0^{-(M-1)} e^{j[\theta_0 + (M-1)\theta_0]}$$

抽样点在 z 平面上所沿的周线如图 4-27(a)所示。由以上讨论和图 4-27(a)可以看出:

(1) A_0 表示起始抽样点 z_0 的矢量半径长度,通常 $A_0 \leq 1$,否则 z_0 将处于单位圆 $|z| = 1$ 的外部。

(2) θ_0 表示起始抽样点 z_0 的相角,它可以是正值或负值。

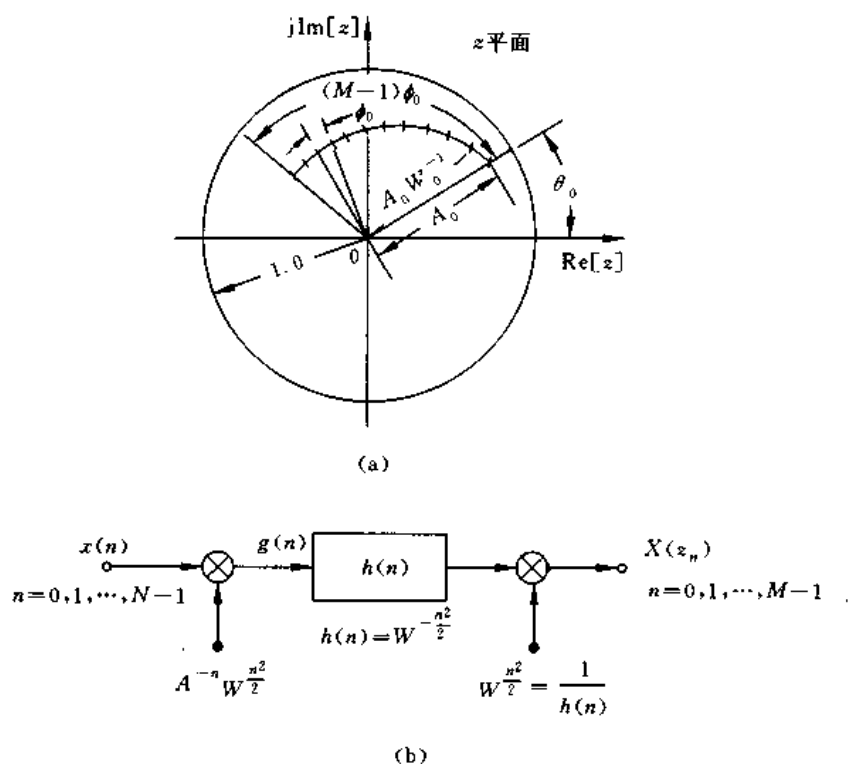


图 4-27

(a) 线性调频 z 变换在 z 平面的螺旋线抽样; (b) Chirp- z 变换运算流程

(3) ϕ_0 表示两相邻抽样点之间的角度差, ϕ_0 为正时, 表示 z_k 的路径是逆时针旋转的; ϕ_0 为负时, 表示 z_k 的路径是顺时针旋转的。

(4) W_0 的大小表示螺旋线的伸展率, $W_0 > 1$ 时, 随着 k 的增加螺旋线内缩, $W_0 < 1$ 时, 则随 k 的增加螺旋线外伸, $W_0 = 1$ 表示是半径为 A_0 的一段圆弧。若又有 $A_0 = 1$ 则这段圆弧是单位圆的一部分。

当 $M = N, A = A_0 e^{j\phi_0} = 1, W = W_0 \cdot e^{-j\phi_0} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (即 $W_0 = 1, \phi_0 = \frac{2\pi}{N}$) 这一特殊情况时, 各 z_k 就均匀等间隔地分布在单位圆上, 这就是求序列的 DFT。

将(4-82)式的 z_k 代入 z 变换表达式(4-81), 可得

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{nk}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4-86)$$

直接计算这一公式, 与直接计算 DFT 相似, 总共算出 M 个抽样点, 需要 NM 次复数乘法与 $(N-1)M$ 次复数加法, 当 N, M 很大时, 这个量很大, 这就限制了运算速度。但是采用布鲁斯坦(Bluestein)提出的等式, 可以将以上运算转换为卷积和形式, 从而可以采用 FFT 算法, 就可以大大提高运算速度。布鲁斯坦所提出的等式为

$$nk = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (k-n)^2] \quad (4-87)$$

将(4-87)式代入(4-86)式, 可得

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}} = W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

令

$$g(n) = x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-88)$$

则

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}} \quad (4-89)$$

$$X(z_k) = W^{\frac{k^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4-90)$$

由(4-90)式可看出, z_k 点的 z 变换可以通过求 $g(k)$ 与 $h(k)$ (此处用变量 k 代替 n) 的线性卷积, 然后乘上 $W^{\frac{k^2}{2}}$ 而得到, 即

$$X(z_k) = W^{\frac{k^2}{2}} [g(k) * h(k)], \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4-91)$$

(4-91)式可以用图 4-27(b)表示。

序列 $h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$ 可以想象为频率随时间(n)成线性增长的复指数序列。在雷达系统中这种信号称为线性调频信号(Chirp signal), 因此, 这里的变换称为线性调频 z 变换。

二、Chirp- z 变换(CZT)的实现步骤

由(4-90)式可看出, 线性系统 $h(n)$ 是非因果的, 当 n 的取值为 0 到 $N-1$, k 的取值为 $0, 1, \dots, M-1$ 时, $h(n)$ 是在 $n=-(N-1)$ 到 $n=M-1$, 也就是说, $h(n)$ 是一个有限长序列, 点数为 $N+M-1$, 见图 4-28(a)。输入信号 $g(n)$ 也是有限长序列, 点数为 N 。 $g(n) * h(n)$ 的点数为 $2N+M-2$, 因而用圆周卷积代替线性卷积且不产生混叠失真条件是圆周卷积的点数(周期)应大于或等于 $2N+M-2$, 但是, 由于我们只需要前 M 个值 $X(z_k)$ ($k=0, 1, \dots, M-1$), 对以后的其他值是否有混叠失真并不感兴趣, 这样可将圆周卷积的点数缩减到最小为 $N+M-1$ 。当然, 为了进行基-2 FFT 运算, 圆周卷积的点数应取为 $L \geq N+M-1$, 同时又满足 $L=2^m$ 的最小 L 。这样可将 $h(n)$ 先补零值点, 补到点数等于 L , 也就是从 $n=M$ 开始补 $L-(N+M-1)$ 个零值点, 补到 $n=L-N$ 处, 或补 $L-(N+M-1)$ 个任意序列值, 然后将此序列以 L 为周期而进行周期延拓, 再取主值序列, 从而得到进行圆周卷积的一个序列, 如图 4-28(b)所示。进行圆周卷积的另一个序列只需将 $g(n)$ 补上零值点, 使之成为 L 点序列即可, 如图 4-28(f)所示。

这样, 我们可以列出 CZT 运算的实现步骤:

(1) 选择一个最小的整数 L , 使其满足 $L \geq N+M-1$, 同时满足 $L=2^m$, 以便采用基-2 FFT 算法。

(2) 将 $g(n) = x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}$ (见图 4-28(f)) 补上零值点, 变为 L 点的序列

$$g(n) = \begin{cases} A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad (4-92)$$

并利用 FFT 法求此序列的 L 点 DFT

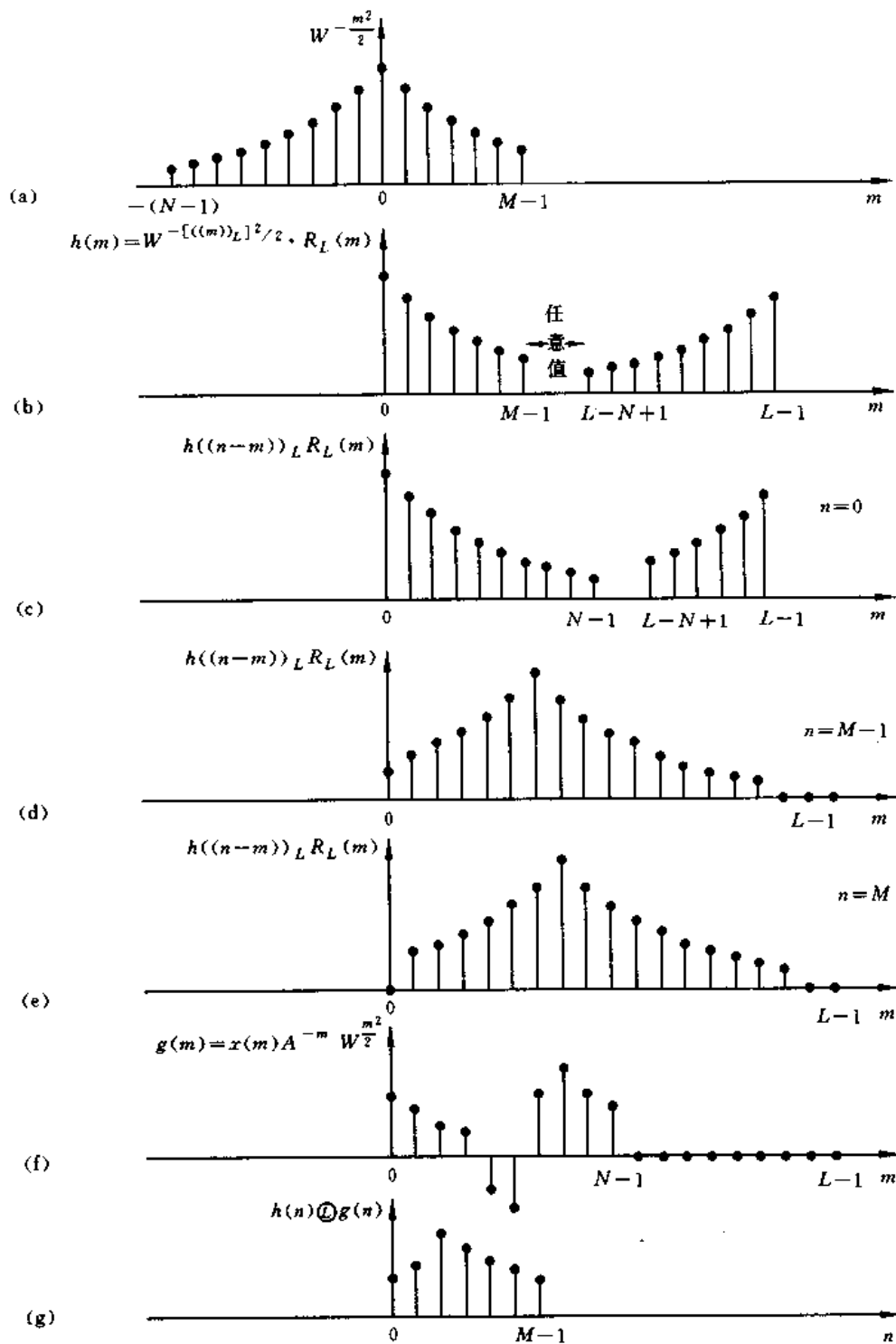


图 4-28 Chirp-z 变换的圆周卷积图
($M \leq n \leq L-1$ 时 $h(n)$ 和 $g(n)$ 的圆周卷积不代表线性卷积)

$$G(r) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}rn}, \quad 0 \leq r \leq L-1 \quad (4-93)$$

(3) 形成 L 点序列 $h(n)$, 如上所述, 在 $n=0$ 到 $M-1$ 一段取 $h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$, 在 $n=M$ 到 $L-N$ 段取 $h(n)$ 为任意值 (一般为零), 在 $n=L-N+1$ 到 $L-1$ 段取 $h(n)$ 为 $W^{-\frac{n^2}{2}}$ 的周期延拓序列 $W^{-\frac{(L-n)^2}{2}}$, 即有

$$h(n) = \begin{cases} W^{-\frac{n^2}{2}}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 \text{ (或任意值)}, & M \leq n \leq L-N \\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}}, & L-N+1 \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad (4-94)$$

此 $h(n)$ 可见图 4-28(b)。实际上它就是图 4-28(a) 的序列 $W^{-\frac{n^2}{2}}$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。

对 (4-94) 式定义的 $h(n)$ 序列, 用 FFT 法求其 L 点 DFT

$$H(r) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}rn}, \quad 0 \leq r \leq L-1 \quad (4-95)$$

(4) 将 $H(r)$ 和 $G(r)$ 相乘, 得 $Q(r) = H(r)G(r)$, $Q(r)$ 为 L 点频域离散序列。

(5) 用 FFT 法求 $Q(r)$ 的 L 点 IDFT, 得 $h(n)$ 与 $g(n)$ 的圆周卷积

$$h(n) \oplus g(n) = q(n) = \frac{1}{L} \sum_{r=0}^{L-1} H(r)G(r) e^{j\frac{2\pi}{L}rn} \quad (4-96)$$

其中前 M 个值等于 $h(n)$ 与 $g(n)$ 的线性卷积结果 $[g(n) * h(n)]$, $n \geq M$ 的值没有意义, 不必去求。 $g(n) * h(n)$ 即 $g(n) \oplus h(n)$ 的前 M 个值可见图 4-28(g)。

(6) 最后求 $X(z_k)$:

$$X(z_k) = W^{\frac{k^2}{2}} q(k), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4-97)$$

三、运算量的估算

CZT 的算法求 $X(z_k)$ 比直接求 $X(z_k)$ 的算法有效得多, CZT 所需的乘法如下:

(1) 形成 L 点序列 $g(n) = (A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}) x(n)$, 但只有其中 N 点有序列值, 需要 N 次复乘, 而系数 $A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}$ 可以递推求得

$$C_n = A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \quad (4-98)$$

$$D_n = W^n W^{\frac{1}{2}} A^{-1} = W^n D_0 = W D_{n-1} \quad (4-99)$$

其中

$$D_0 = W^{\frac{1}{2}} A^{-1} \quad (4-100)$$

则

$$C_{n+1} = A^{-(n+1)} W^{\frac{(n+1)^2}{2}} = (A^{-n} \cdot W^{\frac{n^2}{2}}) (W^n W^{\frac{1}{2}} \cdot A^{-1}) = C_n D_n \quad (4-101)$$

初始条件为 $C_0 = 1, D_0 = W^{\frac{1}{2}} A^{-1} = \frac{\sqrt{W_0}}{A_0} e^{-j(\frac{t_0}{2} + \phi_0)}$, 所以只要预先给定 D_0 及 $W = W_0 e^{-j\phi_0}$,

便可利用(4-99)式及(4-101)式递推求出 N 个系数 C_n 。由此看出,这种递推运算只需 $2N$ 次复乘。

(2) 形成 L 点序列 $h(n)$, 由于它是由 $W^{-\frac{n^2}{2}}$ 在 $-(N-1) \leq n \leq M-1$ 段内的序列值构成, 而 $W^{-\frac{n^2}{2}}$ 是偶对称序列, 如果设 $N > M$, 则只需求得 $0 \leq n \leq N-1$ 一段 N 点序列值即可, 和上面相似, $W^{-\frac{n^2}{2}}$ 的这些数值可以递推求得, 因而只需 $2N$ 次复乘。

(3) 计算 $G(k), H(k), q(n)$ 共需三次 L 点 FFT(或 IFFT), 共需 $\frac{3}{2}L \log_2 L$ 次复乘。

(4) 计算 $Q(k) = G(k)H(k)$ 需要 L 次复乘。

(5) 计算 $X(z_k) = W^{\frac{k^2}{2}} q(k) (0 \leq k \leq M-1)$ 需要 M 次复乘。

综上所述, CZT 总的复数乘法次数为

$$\frac{3}{2}L \log_2 L + 3N + 2N + L + M = \frac{3}{2}L \log_2 L + 5N + L + M$$

前面说过, 直接计算(4-86)式的 $X(z_k)$ 的需要 NM 次复数乘法, 可以看出, 当 N, M 都较大时(例如 N, M 都大于 50 时), CZT 的 FFT 算法比直接算法的运算量要小得多。

由以上讨论看出, CZT 算法非常灵活, 它的输入序列点数 N 和输出序列点数 M 可以不相等, 且 N 和 M 均可为任意数, 包括素数; 各 z_k 点间的角度间隔 ϕ_0 可以是任意的, 因而频率分辨率可以调整; 计算 z 变换的周线可以不是圆而是螺线(前面说过, 例如这对语音分析有用); 起始点 z_0 可任意选定, 也就是说可从任意频率或复频率开始对输入数据进行分析, 便于做窄带高分辨率分析; 在特定情况下(即 $A=1, M=N, W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$), CZT 变成 DFT(N 为素数也可)。

4.10 线性卷积与线性相关的 FFT 算法

一、线性卷积的 FFT 算法

我们以 FIR 滤波器为例, 因为它的输出等于有限长冲激响应 $h(n)$ 与有限长输入信号 $x(n)$ 的离散线性卷积。

设 $x(n)$ 为 L 点, $h(n)$ 为 M 点, 输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n-m)$$

$y(n)$ 也是有限长序列, 其点数为 $L+M-1$ 点。下面讨论线性卷积的运算量。由于每一个 $x(n)$ 的输入值都必须和全部的 $h(n)$ 值相乘一次, 因而总共需要 LM 次乘法, 这就是直接计算的乘法次数, 以 m_d 表示为

$$m_d = LM \quad (4-102)$$

对于线性相位 FIR 滤波器, 满足

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \quad (4-103)$$

其运算结构如第五章的图 5-26、图 5-27 所示(在那里用 N 代替了这里的 M), 图中加权

系数约减少了一半,因而相乘次数大约可以减少一半,即

$$m_d = \frac{LM}{2} \quad (4-104)$$

用 FFT 法也就是用圆周卷积来代替这一线性卷积时,为了不产生混叠,其必要条件是使 $x(n)$, $h(n)$ 都补零值点,补到至少 $N=M+L-1$,即

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

然后计算圆周卷积

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

这时, $y(n)$ 就能代表线性卷积的结果。

用 FFT 计算 $y(n)$ 值的步骤如下:

- (1) 求 $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$, N 点;
- (2) 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, N 点;
- (3) 计算 $Y(k) = X(k)H(k)$;
- (4) 求 $y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$, N 点。

步骤(1), (2), (4)都可用 FFT 来完成。此时的工作量如下:三次 FFT 运算共需 $\frac{3}{2}N \log_2 N$ 次相乘,还有步骤(3)的 N 次相乘,因此共需相乘次数为

$$m_F = \frac{3}{2}N \log_2 N + N = N \left(1 + \frac{3}{2} \log_2 N \right) \quad (4-105)$$

这样,我们可用线性相位 FIR 滤波器来比较直接计算线性卷积和 FFT 法计算线性卷积这两种方法的乘法次数。设(4-104)式 m_d 与(4-105)式 m_F 的比值为 K_m ,则

$$K_m = \frac{m_d}{m_F} = \frac{ML}{2N \left(1 + \frac{3}{2} \log_2 N \right)} = \frac{ML}{2(M+L-1) \left[1 + \frac{3}{2} \log_2 (M+L-1) \right]} \quad (4-106)$$

分两种情况讨论如下:

- (1) $x(n)$ 与 $h(n)$ 点数差不多。例如,设 $M=L$,则 $N=2M-1 \approx 2M$,则

$$K_m = \frac{M}{4 \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \log_2 M \right)} = \frac{M}{10 + 6 \log_2 M}$$

这样可得下表:

$M=L$	8	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
K_m	0.286	0.80	1.39	2.46	4.41	8	14.62	26.95	49.95

当 $M=8, 16, 32$ 时,圆周卷积的运算量大于线性卷积;当 $M=64$ 时,二者相当(圆周卷积稍好);当 $M=512$ 时,圆周卷积运算速度可快 8 倍;当 $M=4096$ 时,圆周卷积约可快 50 倍。可以看出,当 $M=L$ 且 M 超过 64 以后, M 越长圆周卷积的好处越明显。因而将

圆周卷积称为快速卷积。

(2) 当 $x(n)$ 的点数很多时, 即当

$$L \gg M$$

则

$$N = L + M - 1 \approx L$$

这时

$$K_m = M / (2 + 3 \log_2 L) \quad (4-107)$$

于是, 当 L 太大时, 会使 K_m 下降, 圆周卷积的优点就表现不出来了, 因此需采用分段卷积或称分段过滤的办法。

下面讨论一个短的有限长序列与一个长序列的卷积。例如, 当 $x(n)$ 是很长的序列, 利用圆周卷积时, $h(n)$ 必须补很多个零值点, 很不经济。因而必须将 $x(n)$ 分成点数和 $h(n)$ 相仿的段, 分别求出每段的卷积结果, 然后用一定方式把它们合在一起, 从而得到总的输出。对每一段的卷积均采用 FFT 方法处理。有两种分段卷积的办法, 讨论如下。

1. 重叠相加法

设 $h(n)$ 的点数为 M , 信号 $x(n)$ 为很长的序列。我们将 $x(n)$ 分解为很多段, 每段为 L 点, L 选择成和 M 的数量级相同, 用 $x_i(n)$ 表示 $x(n)$ 的第 i 段:

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n), & iL \leq n \leq (i+1)L - 1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots \quad (4-108)$$

则输入序列可表示成

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) \quad (4-109)$$

这样, $x(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积等于各 $x_i(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积之和, 即

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) * h(n) \quad (4-110)$$

每一个 $x_i(n) * h(n)$ 都可用上面讨论的快速卷积办法来运算。由于 $x_i(n) * h(n)$ 为 $L + M - 1$ 点, 故先对 $x_i(n)$ 及 $h(n)$ 补零值点, 补到 N 点。为便于利用基-2 FFT 算法, 一般取 $N = 2^m \geq L + M - 1$, 然后作 N 点的圆周卷积:

$$y_i(n) = x_i(n) \otimes h(n)$$

由于 $x_i(n)$ 为 L 点, 而 $y_i(n)$ 为 $(L + M - 1)$ 点 (设 $N = L + M - 1$), 故相邻两段输出序列必然有 $(M - 1)$ 个点发生重叠, 即前一段的后 $(M - 1)$ 个点和后一段的前 $(M - 1)$ 个点相重叠, 如图 4-29 所示。按照 (4-110) 式, 应该将这个重叠部分相加再和不重叠的部分共同组成输出 $y(n)$ 。

和上面的讨论一样, 用 FFT 法实现重叠相加法的步骤如下

(1) 计算 N 点 FFT, $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$;

(2) 计算 N 点 FFT, $X_i(k) = \text{DFT}[x_i(n)]$;

(3) 相乘, $Y_i(k) = X_i(k) H(k)$;

(4) 计算 N 点 IFFT, $y_i(n) = \text{IDFT}[Y_i(k)]$;

(5) 将各段 $y_i(n)$ (包括重叠部分) 相加, $y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(n)$ 。

重叠相加法的名称是由于各输出段的重叠部分相加而得名。

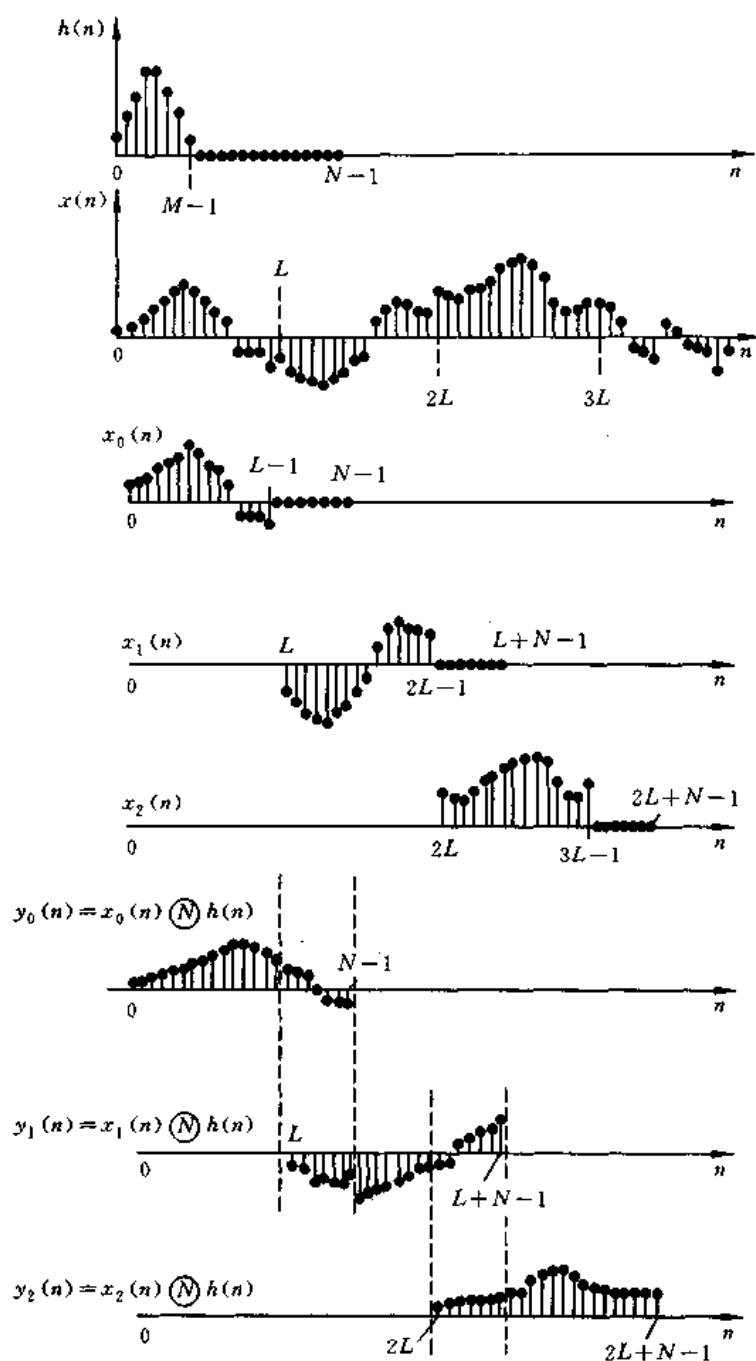


图 4-29 重叠相加法图形

2. 重叠保留法

此方法与上述方法稍有不同。先将 $x(n)$ 分段, 每段 $L = N - M + 1$ 个点, 这是相同的; 不同之处是, 序列中补零处不补零, 而在每一段的前边补上上一段保留下来的 $(M-1)$ 个输入序列值, 组成 $L + M - 1$ 点序列 $x_i(n)$, 如图 4-30(a) 所示。如果 $L + M - 1 < 2^m$, 则可在每段序列末端补零值点, 补到长度为 2^m , 这时如果用 DFT 实现 $h(n)$ 和 $x_i(n)$ 圆周卷

积,则其每段圆周卷积结果的前 $(M-1)$ 个点的值不等于线性卷积值,必须舍去。

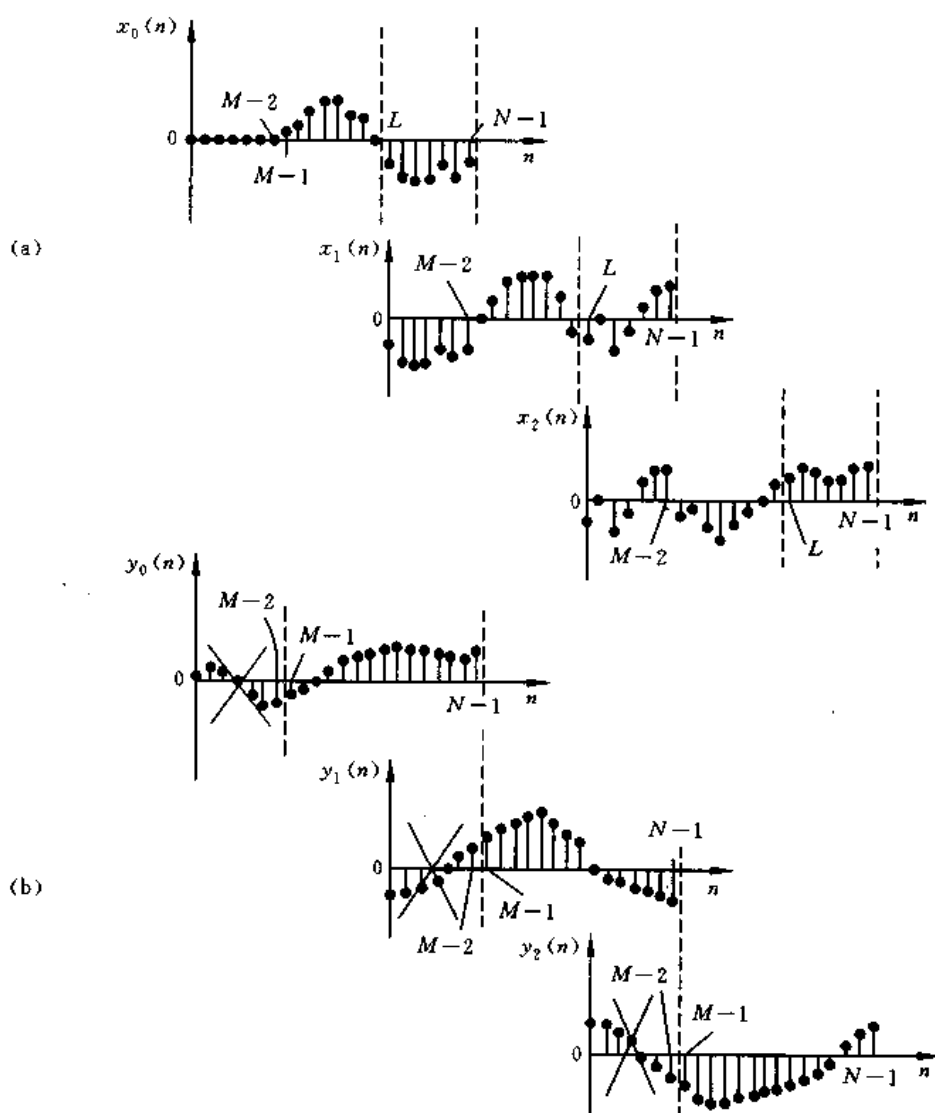


图 4-30 重叠保留法示意图

为了说明以上说法的正确性,我们来看一看图 4-31。任一段 $x_i(n)$ (为 N 点) 与 $h(n)$ (原为 M 点,补零值点后也为 N 点) 的 N 点圆周卷积

$$y'_i(n) = x_i(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i(m) h((n-m))_N R_N(n) \quad (4-111)$$

由于 $h(m)$ 为 M 点,补零后作 N 点圆周移位时,在 $n=0, 1, \dots, M-2$ 的每种情况下, $h((n-m))_N R_N(m)$ 在

$$0 \leq m \leq N-1$$

范围的末端出现非零值,而此处 $x_i(m)$ 是有数值存在的,如图 4-31(c), (d) 为 $n=0, n=M-2$ 的情况,所以在

$$0 \leq n \leq M-2$$

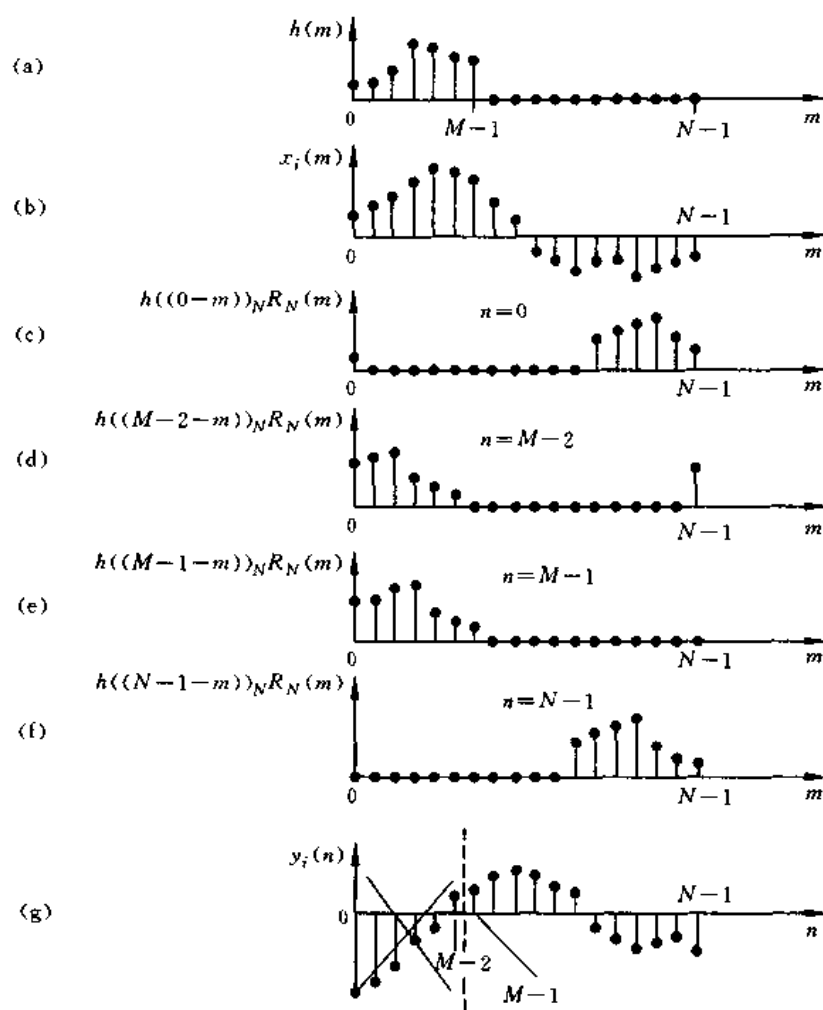


图 4-31 用保留信号代替补零后的局部混叠现象

这一部分的 $y'_i(n)$ 值中将混入 $x_i(m)$ 尾部与 $h((n-m))_N R_N(m)$ 尾部的乘积值, 从而使这些点的 $y'_i(n)$ 值不同于线性卷积结果。但是从 $n = M-1$ 开始直到 $n = N-1$, $h((n-m))_N R_N(m) = h(n-m)$ (如图 4-31(e), (f) 所示), 圆周卷积值完全与线性卷积值一样, $y'_i(n)$ 就是正确的线性卷积值。因而必须把每一段圆周卷积结果的前 $(M-1)$ 个值去掉, 如图 4-31(g) 所示。

因此, 为了不造成输出信号的遗漏, 对输入分段时, 就需要使相邻两段有 $M-1$ 个点重叠 (对于第一段, 即 $x_0(n)$, 由于没有前一段保留信号, 则需在序列前填充 $M-1$ 个零值点), 这样, 设原输入序列为 $x'(n)$ ($n \geq 0$ 时有值), 则应重新定义输入序列

$$x(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq M-2 \\ x'[n-(M-1)], & M-1 \leq n \end{cases} \quad (4-112)$$

而

$$x_i(n) = \begin{cases} x[n+i(N-M+1)], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots$$

在这一公式中, 已经把每一段的时间原点放在该段的起始点, 而不是 $x(n)$ 的原点。这种

分段方法示于图 4-30 中,每段 $x_i(n)$ 和 $h(n)$ 的圆周卷积结果以 $y'_i(n)$ 表示,如图 4-30(b) 所示,图中已标出每一输出段开始的 $(M-1)$ 个点 $0 \leq n \leq M-2$ 部分需舍掉不用。把相邻各输出段留下的序列衔接起来,就构成了最后的正确输出,即

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i[n - i(N - M + 1)] \quad (4-113)$$

式中

$$y_i(n) = \begin{cases} y'_i(n), & M-1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (4-114)$$

这时,每段输出的时间原点放在 $y_i(n)$ 的起始点,而不是 $y(n)$ 的原点。

重叠保留法的名称是因为每一组相继的输入段均由 $(N-M+1)$ 个新点和前一段保留下来的 $(M-1)$ 个点所组成而得名的。

二、线性相关的 FFT 算法

在第三章中已说过,自相关与互相关在统计通信与数字信号处理中都是十分重要的。

利用 FFT 计算相关函数也就是利用圆周相关来代替线性相关,常称之为快速相关。这与利用 FFT 的快速卷积类似(即利用圆周卷积代替线性卷积),也要利用补零值点的办法来避免混叠失真。

设 $x(n)$ 为 L 点, $y(n)$ 为 M 点,需求线性相关

$$r_{xy}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(n+m)y^*(m) \quad (4-115)$$

利用 FFT 法求线性相关是用圆周相关代替线性相关,选择 $N \geq L+M-1$, 且 $N=2^r$ (r 为整数), 令

$$\begin{aligned} x(n) &= \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N-1 \end{cases} \\ y(n) &= \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq N-1 \end{cases} \end{aligned}$$

其计算步骤如下(考虑到第三章的(3-77)式, (3-78)式):

- (1) 求 N 点 FFT, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$;
- (2) 求 N 点 FFT, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$;
- (3) 求乘积, $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$;
- (4) 求 N 点 IFFT, $r_{xy}(n) = \text{IDFT}[R_{xy}(k)]$ 。

同样,可以只利用已有的 FFT 程序计算 IFFT, 求

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R_{xy}(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} R_{xy}^*(k) W_N^{nk} \right]^* \quad (4-116)$$

即 $r_{xy}(n)$ 可以利用求 $R_{xy}^*(k)$ 的 FFT 后取共轭再乘 $1/N$ 得到。

利用 FFT 法计算线性相关的这一算法其计算量与利用 FFT 计算线性卷积时是一样的。

4.11 数字信号处理的实现

数字信号处理应包括数字信号处理的理论、分析方法、算法与数字信号处理的实现,即数字信号处理的软件及硬件实现方法。

实现数字信号处理的方法有以下三种。

1. 采用计算机或微机

通过程序,用软件的办法来完成数字信号处理任务。这一实现法的优点是可适用于各种数字信号处理的应用场合,很灵活,缺点是不能实时处理。由于数字信号处理算法中有大量重复的算术运算,它只需利用计算机的一小部分运算系统,没有充分发挥计算机的能力,造成不必要的浪费。

2. 采用专用的信号处理器

针对某种信号处理的特有运算,用专用的硬件或专用信号处理芯片组成专用的数字信号处理器。它对于大量经常重复进行某一相同信号处理运算的场合,很是方便,且很经济。可做到实时处理。但是,运用场合改变,处理方法改变时,这种专用信号处理器就不适用了。

3. 采用通用的信号处理器

通用的信号处理器也是一种计算机,但它和通用的计算机在体系结构上有所不同。两者的差别在于:

- (1) 信号处理器具有适应数字信号处理算法基本运算的指令;
- (2) 信号处理器具有适应信号处理数据结构的寻址机构;
- (3) 信息处理器能充分利用算法的并行性,也就是说,它具有可编程能力,可适应于各种信号处理应用场合,灵活性大,适应性强,且可进行高速信号处理。

数字信号处理的运算特点有以下两个方面:

- (1) 最常出现的是以下算术运算:

$$A = \sum_{k=1}^N d_k B_k$$

其中 d_k 为系数, B_k 为数据或中间结果。例如卷积、相关、离散傅里叶变换等都是这类算术运算。

(2) 其输入输出运算数小于算术运算数。专用或通用数字信号处理器也正是适应这些要求而设计的,因而有可能做到快速实时处理。信号处理器 TMS320 系列就是专为信号处理而设计的芯片,其基本特点是:

① 哈佛结构: 程序存储器与数据存储器互相分开,具有一条独立的地址总线和一条独立的数据总线。两条总线由程序存储器和数据存储器分时共用。

② 专用硬件乘法器: 可使乘法时间大大缩短,很适用于信号处理运算。

③ 多级流水线: 可把指令周期减到最小值,同时增加了数字信号处理的吞吐量。

④ 特殊的数字信号处理指令: 例如对数字信号处理非常重要的延时操作就有 DMOV 指令(传送数据,实现延时)。



Powered by xiaoguo's publishing studio
QQ:8204136